Nichtkommutative Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von
Armin Jöllenbeck
Kiel 1997

Referent: ....

Korreferent: ....

Tag der mündlichen Prüfung: ....

Zum Druck genehmigt: Kiel, den ....

....

Der Dekan

Meinem Vater

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Zugang zur *Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen* beschrieben. Dabei wird nur der Fall betrachtet, daß der zugrunde gelegte Körper die Charakteristik Null hat. In diesem Fall besteht ein wesentlicher Teil der Theorie darin, *Charaktere* von Darstellungen zu untersuchen.

Zunächst werden drei ineinander enthaltene *nichtkommutative* Bialgebren definiert: die der vollen Worte, die der Permutationen und die Rahmenalgebra. Anschließend wird die *kommutative* Bialgebra der Klassenfunktionen definiert, mit der sich grundlegende Konzepte der Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen übersichtlich beschreiben lassen. Diese umfassen Induktion, Restriktion, Skalarprodukt und irreduzible Charaktere.

Der sich anschließende Hauptteil besteht darin, einen Epimorphismus von der Rahmenalgebra auf die Bialgebra der Klassenfunktionen anzugeben.

Abschließend werden die irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppen bestimmt und zum Nachweis der Anwendbarkeit der hier entwickelten Theorie der *Satz von Murnaghan–Nakayama*, eines der Glanzstücke der klassischen Theorie, bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Worte

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.

Für alle Teilmengen $T \subseteq \mathbf{N}$ setzen wir $T_0 := T \cup \{0\}$.

Wir benutzen für alle $n \in \mathbf{N}_0$ die folgende abkürzende Schreibweise:

$$[n] := \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n\} \quad .$$

In der vorliegenden Arbeit sind die grundlegenden Objekte *Worte* mit natürlichen Zahlen als Buchstaben, d.h. Tupel von natürlichen Zahlen, genauer gesagt Abbildungen $[k] \to \mathbf{N}$ für ein $k \in \mathbf{N}$.

Für Worte $u \in \mathbf{N}^k$ und $v \in \mathbf{N}^l$ definieren wir deren *Konkatenation* $uv \in \mathbf{N}^{k+l}$ durch:

$$(uv)_i := \begin{cases} u_i & \text{falls} \quad i \leq k \\ v_{i-k} & \text{falls} \quad i > k \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in [k+l] \quad .$$

Hierbei tritt ein Notationsproblem auf: Da u und v Abbildungen sind, und wir in dieser Arbeit für die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen einfach diese hintereinander schreiben, wobei die linksstehende zuerst angewendet werden soll, könnte man unter uv auch die Hintereinanderausführung von u und v verstehen. Die gemeinte Bedeutung ergibt sich hoffentlich leicht aus dem jeweiligen Kontext.

Die Menge

$$\mathbf{N}^* := \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \mathbf{N}^n$$

ist mit der Konkatenation von Worten ein von $\mathbf{N}^1$ frei erzeugtes Monoid, wobei das Einselement gerade das *leere Wort* $\emptyset$ ist. Wir identifizieren $\mathbf{N}^1$ und $\mathbf{N}$.

Im folgenden sei K ein Körper.

Wir wählen einen Vektorraum $K\mathbf{N}^*$ über K mit $\mathbf{N}^*$ als einer Basis.

Dann benutzen wir allgemein für alle $T \subseteq \mathbf{N}^*$ die Schreibweise

$$KT := \langle T \rangle_K$$

für das lineare Erzeugnis von T in $K\mathbf{N}^*$.

Wir definieren eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ auf $K\mathbf{N}^*$ durch:

$$\langle u \, , v \rangle := \begin{cases} 1 & \text{falls } u = v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbf{N}^* \quad ,$$

und eine symmetrische Bilinearform auf $K\mathbf{N}^* \otimes K\mathbf{N}^*$ durch:

$$\langle u_1 \otimes u_2 \, , v_1 \otimes v_2 \rangle := \langle u_1 \, , v_1 \rangle \ \langle u_2 \, , v_2 \rangle \qquad \text{für alle } u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{N}^* \quad .$$

Durch bilineare Fortsetzung der Konkatenation definieren wir eine Multiplikation auf $K\mathbf{N}^*$ und erhalten eine von $\mathbf{N}$ frei erzeugte assoziative Algebra mit Einselement.[1]

Die *Länge* eines Wortes $w \in \mathbf{N}^*$ ist gerade die Mächtigkeit $|w|$, also $w \in \mathbf{N}^{|w|}$.

Für alle $w \in \mathbf{N}^*$ und $i \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$|w|_i := |\{k \in [|w|] \mid w_k = i\}| \quad .$$

Für alle $T \subseteq \mathbf{N}^*$ und $q \in \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$T(q) := \{\, w \in T \;\mid\; \forall_{i \in [|q|]}\, |w|_i = q_i \;\text{ und }\; \forall_{i \in \mathbf{N} \setminus [|q|]}\, |w|_i = 0 \,\} \quad .$$

Für alle $T \subseteq \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$T(*) := \bigcup_{q \in \mathbf{N}^*} T(q) \quad .$$

Für alle $T \subseteq \mathbf{N}^*$ und $n \in \mathbf{N}_0$ setzen wir

$$T^{(n)} := \bigcup_{\substack{q \in \mathbf{N}^* \\ |q| = n}} T(q) \quad .$$

Die Elemente von $\mathbf{N}^*(*)$ nennen wir *volle Worte*. Ein Wort $w \in \mathbf{N}^*$ ist genau dann ein volles Wort, wenn Bild $w = [k]$ ist für ein $k \in \mathbf{N}_0$.

Sind $n \in \mathbf{N}_0$ und $q \in \mathbf{N}^*$, so heißt q eine *Zerlegung* von n , in Zeichen $q \models n$, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{|q|} q_i = n \quad .$$

Eine Zerlegung $q \models n$ heißt *Partition* von n , in Zeichen $q \vdash n$, wenn zusätzlich gilt:

$$q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_{|q|} \quad .$$

Wie üblich bezeichnen wir mit $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n .

Der Begriff *Zerlegung* läßt sich wie folgt verallgemeinern: Sind $q, r \in \mathbf{N}^*$, so heißt q *Zerlegung* von r , in Zeichen wiederum $q \models r$, wenn sich q schreiben läßt als $q = t_1 \cdots t_{|r|}$ mit $t_1, \ldots, t_{|r|} \in \mathbf{N}^*$ und $t_k \models r_k$ für alle $k \in [|r|]$. Die Relation $\models$ ist eine Halbordnung auf $\mathbf{N}^*$.

Sind $q, r \in \mathbf{N}^*$, so heißen q und r *assoziiert*, in Zeichen $q \approx r$, wenn ein $\pi \in S_{|q|}$ existiert mit $q_{1\pi} q_{2\pi} \cdots q_{|q|\pi} = r$. Offensichtlich ist jede Zerlegung von n assoziiert zu genau einer Partition von n . Die Relation $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{N}^*$.

[1] Definiert man ferner auf $K\mathbf{N}^*$ als Coprodukt den Algebren-Homomorphismus δ von $K\mathbf{N}^*$ nach $K\mathbf{N}^* \otimes K\mathbf{N}^*$ mittels der Freiheit von $K\mathbf{N}^*$ durch $a \mapsto a \otimes \emptyset + \emptyset \otimes a$ für alle $a \in \mathbf{N}$, so erhält man eine Bialgebra. Das prominenteste Ergebnis für diese ist der Satz von Friedrichs: Ein Element $f \in K\mathbf{N}^*$ ist genau dann in der von $\mathbf{N}$ mit dem Lieprodukt $x \circ y := xy - yx$ erzeugten Lieteilalgebra von $K\mathbf{N}^*$, wenn das Bild von f unter diesem Coprodukt gleich $f \otimes \emptyset + \emptyset \otimes f$ ist.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen definieren wir eine für das folgende überaus wichtige algebraische Struktur auf $K\mathbf{N}^*(*)$. Dabei handelt es sich um eine von der Konkatenation verschiedene Multiplikation und ein Coprodukt, mit denen $K\mathbf{N}^*(*)$ zu einer Bialgebra wird.

1.1 Definition Seien $A, B \subseteq \mathbf{N}$ mit $|A| = |B|$. Wir definieren einen Homomorphismus

$$\binom{A}{B} : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$$

mittels der Freiheit von $\mathbf{N}^*$ durch:

$$\left.\binom{A}{B}\right|_A \text{ ist eine monotone Bijektion von } A \text{ auf } B \quad ,$$

$$x\binom{A}{B} = \emptyset \text{ für alle } x \in \mathbf{N} \setminus A \quad .$$

1.2 Lemma Seien $A, B, C, D \subseteq \mathbf{N}$ mit $|A| = |B|$ und $|C| = |D|$.
Wir setzen

$$X := (B \cap C) \left.\binom{A}{B}\right|_A^{-1} \quad \text{und} \quad Y := (B \cap C) \left.\binom{C}{D}\right|_C \quad .$$

Dann gilt:

$$\binom{A}{B}\binom{C}{D} = \binom{X}{Y} \quad .$$

1.3 Definition Seien $k, l \in \mathbf{N}_0$ und $u \in \mathbf{N}^{(k)}$, $v \in \mathbf{N}^{(l)}$.
Dann definieren wir $u \bullet v \in K\mathbf{N}^{(k+l)}$ durch:

$$u \bullet v := \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} u\binom{[k]}{T} \, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T} \quad .$$

Durch bilineare Fortsetzung erhalten wir eine Multiplikation $\bullet$ auf $K\mathbf{N}^*(*)$. Auf $K\mathbf{N}^*(*) \otimes K\mathbf{N}^*(*)$ definieren wir dann wie üblich eine Multiplikation durch

$$(u_1 \otimes u_2) \bullet (v_1 \otimes v_2) := u_1 \bullet v_1 \otimes u_2 \bullet v_2$$

und bilineare Fortsetzung.

1.4 Definition Seien $n \in \mathbf{N}_0$ und $w \in \mathbf{N}^{(n)}$.
Dann definieren wir $w\!\downarrow\, \in K\mathbf{N}^*(*) \otimes K\mathbf{N}^*(*)$ durch:

$$w\!\downarrow\, := \sum_{j=0}^{n} w\binom{[j]}{[j]} \otimes w\binom{[n]\setminus[j]}{[n-j]} \quad .$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir ein Coprodukt $\downarrow$ auf $K\mathbf{N}^*(*)$.

1.5 Satz Für alle $u, v \in K\mathbf{N}^*(*)$ gilt:

$$(u \bullet v)\!\downarrow\, = u\!\downarrow \bullet\, v\!\downarrow \quad .$$

Beweis: Seien $k, l \in \mathbf{N}_0$ und $u \in \mathbf{N}^{(k)}$, $v \in \mathbf{N}^{(l)}$.

Dann gilt einerseits:

$$
\begin{aligned}
(u \bullet v)\!\downarrow \quad &= \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} \left(u\binom{[k]}{T}\, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T} \right) \downarrow \\[2ex]
&= \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} \sum_{j=0}^{k+l} \left(u\binom{[k]}{T}\, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T} \right) \binom{[j]}{[j]} \\
&\qquad \otimes \left(u\binom{[k]}{T}\, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T} \right) \binom{[k+l]\setminus[j]}{[k+l-j]} \\[2ex]
&= \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} \sum_{j=0}^{k+l} u\binom{[k]}{T}\binom{[j]}{[j]}\, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T}\binom{[j]}{[j]} \\
&\qquad \otimes u\binom{[k]}{T}\binom{[k+l]\setminus[j]}{[k+l-j]}\, v\binom{[l]}{[k+l]\setminus T}\binom{[k+l]\setminus[j]}{[k+l-j]} \\[2ex]
&\underset{1.2}{=} \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} \sum_{j=0}^{k+l} u\binom{[|T\cap[j]|]}{T\cap[j]}\, v\binom{[j-|T\cap[j]|]}{[j]\setminus(T\cap[j])} \\
&\qquad \otimes u\binom{[k]\setminus[|T\cap[j]|]}{(T\setminus[j])-j}\, v\binom{[l]\setminus[j-|T\cap[j]|]}{[k+l-j]\setminus((T\setminus[j])-j)}
\end{aligned}
$$

und andererseits:

$$
\begin{aligned}
u\!\downarrow \bullet\, v\!\downarrow \quad &= \left(\sum_{j_1=0}^{k} u\binom{[j_1]}{[j_1]} \otimes u\binom{[k]\setminus[j_1]}{[k-j_1]} \right) \bullet \left(\sum_{j_2=0}^{l} v\binom{[j_2]}{[j_2]} \otimes v\binom{[l]\setminus[j_2]}{[l-j_2]} \right) \\[2ex]
&= \sum_{j_1=0}^{k} \sum_{j_2=0}^{l} \left(u\binom{[j_1]}{[j_1]} \bullet v\binom{[j_2]}{[j_2]} \right) \otimes \left(u\binom{[k]\setminus[j_1]}{[k-j_1]} \bullet v\binom{[l]\setminus[j_2]}{[l-j_2]} \right) \\[2ex]
&= \sum_{j_1=0}^{k} \sum_{j_2=0}^{l} \sum_{\substack{T_1 \subseteq [j_1+j_2] \\ |T_1|=j_1}} \sum_{\substack{T_2 \subseteq [k+l-j_1-j_2] \\ |T_2|=k-j_1}} \\
&\qquad u\binom{[j_1]}{[j_1]}\binom{[j_1]}{T_1}\, v\binom{[j_2]}{[j_2]}\binom{[j_2]}{[j_1+j_2]\setminus T_1} \\
&\qquad \otimes u\binom{[k]\setminus[j_1]}{[k-j_1]}\binom{[k-j_1]}{T_2}\, v\binom{[l]\setminus[j_2]}{[l-j_2]}\binom{[l-j_2]}{[k+l-j_1-j_2]\setminus T_2}
\end{aligned}
$$

$$\underset{1.2}{=} \sum_{j_1=0}^{k} \sum_{j_2=0}^{l} \sum_{\substack{T_1 \subseteq [j_1+j_2] \\ |T_1|=j_1}} \sum_{\substack{T_2 \subseteq [k+l-j_1-j_2] \\ |T_2|=k-j_1}}$$

$$u\binom{[j_1]}{T_1} v\binom{[j_2]}{[j_1+j_2]\backslash T_1} \otimes u\binom{[k]\backslash[j_1]}{T_2} v\binom{[l]\backslash[j_2]}{[k+l-j_1-j_2]\backslash T_2}$$

$$= \sum_{\substack{T \subseteq [k+l] \\ |T|=k}} \sum_{j=0}^{k+l} \underbrace{\sum_{j_1=0}^{k} \sum_{j_2=0}^{l}}_{j_1+j_2=j} \underbrace{\sum_{\substack{T_1 \subseteq [j_1+j_2] \\ |T_1|=j_1}} \sum_{\substack{T_2 \subseteq [k+l-j_1-j_2] \\ |T_2|=k-j_1}}}_{T_1 \cup (T_2+j)=T}$$

$$u\binom{[j_1]}{T_1} v\binom{[j_2]}{[j_1+j_2]\backslash T_1} \otimes u\binom{[k]\backslash[j_1]}{T_2} v\binom{[l]\backslash[j_2]}{[k+l-j_1-j_2]\backslash T_2}$$

Ein Vergleich beider Summationen ergibt die Behauptung. □

Eine ebenso elementare und etwas längliche Rechnung beweist:

1.6 Satz Das Produkt $\bullet$ ist assoziativ.

1.7 Bemerkung Das leere Wort $\emptyset$ ist Einselement bzgl. des Produkts $\bullet$.

Satz 1.5 besagt gerade, daß $K\mathbf{N}^*(*)$ mit dem Produkt $\bullet$ und dem Coprodukt $\downarrow$ eine Bialgebra ist.

2 Permutationen

Für alle $n \in \mathbf{N}$ sind die Elemente von $\mathbf{N}^*(1^n)$ gerade die *Permutationen* aus der symmetrischen Gruppe S_n . Wir setzen

$$S := \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} S_n$$

und erhalten

$$KS = \sum_{n \in \mathbf{N}_0} KS_n \subseteq K\mathbf{N}^*(*) \quad .$$

Diese Summe ist offensichtlich direkt.

Ein kurzer Blick auf 1.3 und 1.4 zeigt, daß die Einschränkungen von $\bullet$ und $\downarrow$ den Teilraum KS von $K\mathbf{N}^*(*)$ zu einer Teilbialgebra machen.[2] Auch das

[2] Das Produkt läßt sich auch wie folgt definieren: Man bilde zu der in Fußnote 1 auf Seite 6 beschriebenen Bialgebra die sogenannte Konvolutionsalgebra $\mathrm{End}_K K\mathbf{N}^*$ und erkennt KS als Teilalgebra davon. Genauer gesagt, definiere man ein Produkt auf $\mathrm{End}_K K\mathbf{N}^*$ durch $f \bullet g := \delta(f \otimes g)\mu$, wobei $\mu : K\mathbf{N}^* \otimes K\mathbf{N}^* \to K\mathbf{N}^*$ die durch $x \otimes y \mapsto xy$ definierte lineare Abbildung ist. Anschließend identifiziere man eine Permutation mit dem linearen Endomorphismus, den sie durch Linksoperation auf Worten bewirkt. Zu dieser Definition des Produkts siehe [10] , Seite 978. Reutenauer und Malvenuto definieren dort auf Seite 977 das Coprodukt wie in 1.4, bloß nur für Permutationen, statt für volle Worte.

Einselement ist in KS enthalten:

$$\emptyset = id_\emptyset \in S_0 \subseteq KS \quad .$$

Für diese Bialgebra gibt die folgende Definition ein wichtiges linearalgebraisches Konzept:

2.1 Definition Wir definieren eine symmetrische Bilinearform[3] auf KS durch:

$$(\sigma\,,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma = \tau^{-1} \\ 0 & \text{für } \sigma \neq \tau^{-1} \end{cases} \qquad \text{für alle } \sigma, \tau \in S \quad ,$$

und eine symmetrische Bilinearform auf $KS \otimes KS$ durch:

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2\,, \tau_1 \otimes \tau_2) := (\sigma_1\,, \tau_1)\ (\sigma_2\,, \tau_2) \qquad \text{für alle } \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in S \quad .$$

2.2 Bemerkung Die symmetrische Bilinearform $(\cdot\,,\cdot)$ auf KS ist assoziativ:

$$(\phi\psi\,, \rho) = (\phi\,, \psi\rho) \qquad \text{für alle } \phi, \psi, \rho \in KS \quad .$$

2.3 Lemma Für alle $m \in \mathbf{N}$, $\pi \in S_m$ und $A \subseteq \mathbf{N}$ mit $|A| = m$ gilt:

$$\pi\binom{[m]}{A} = \pi\ \binom{[m]}{A}\Big|_{[m]} \quad .$$

Dabei steht auf der linken Seite das Bild des Wortes π unter dem Endomorphismus $\binom{[m]}{A}$ von $\mathbf{N}^*$ und auf der rechten Seite die Hintereinanderausführung der Permutation π und der Abbildung $\binom{[m]}{A}\Big|_{[m]} : [m] \to A$.

Bemerkenswert ist das folgende Reziprozitätsgesetz:

2.4 Satz Für alle $\sigma, \tau, \pi \in KS$ gilt:

$$(\sigma \bullet \tau\,, \pi) = (\sigma \otimes \tau\ ,\ \pi\!\downarrow) \quad .$$

Beweis: Es genügt, $\sigma, \tau, \pi \in S$ zu betrachten. Seien $k, l \in \mathbf{N}_0$ und $\sigma \in S_k$, $\tau \in S_l$. Sei π eine weitere Permutation. Wegen $\sigma \bullet \tau \in \mathbf{N}^{(k+l)}$ können wir annehmen, daß $\pi \in S_{k+l}$ ist.

Einerseits ist $(\sigma \bullet \tau\,, \pi) \in \{0, 1\}$ und genau dann gleich 1 , wenn gilt:

$$\sigma\binom{[k]}{[k]\pi^{-1}}\,\tau\binom{[l]}{[n]\backslash[k]\pi^{-1}} = \pi^{-1} \quad .$$

Mit 2.3 und der Definition der Konkatenation von Worten bedeutet letzteres gerade:

$$\pi^{-1}\Big|_{[k]} = \sigma\ \binom{[k]}{[k]\pi^{-1}}\Big|_{[k]}$$

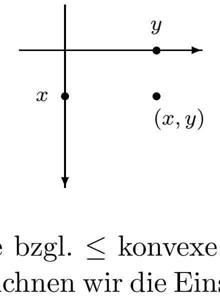
[3]Man sieht leicht, daß hier nichts anderes definiert wird als die Killingform der Algebra $KS = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}_0} KS_n$ mit der Hintereinanderausführung von Permutationen als Produkt in den einzelnen Summanden.

und
$$\pi^{-1}\Big|_{[n]\setminus[k]} = \left({[n]\setminus[k] \atop [l]}\right)\Big|_{[n]\setminus[k]} \;\tau\; \left({[l] \atop [n]\setminus[k]\pi^{-1}}\right)\Big|_{[l]} \quad .$$
Dies läßt sich leicht äquivalent umformen zu:
$$\sigma^{-1} = \left({[k] \atop [k]\pi^{-1}}\right)\Big|_{[k]} \;\pi|_{[k]\pi^{-1}}$$
und
$$\tau^{-1} = \left({[l] \atop [n]\setminus[k]\pi^{-1}}\right)\Big|_{[l]} \;\pi|_{[n]\setminus[k]\pi^{-1}}\; \left({[n]\setminus[k] \atop [l]}\right)\Big|_{[n]\setminus[k]} \quad .$$
Andererseits ist $(\sigma \otimes \tau\ ,\ \pi\!\downarrow) \in \{0,1\}$ und genau dann gleich 1 , wenn gilt:
$$\sigma^{-1} = \pi\left({[k] \atop [k]}\right) \quad \text{und} \quad \tau^{-1} = \pi\left({[n]\setminus[k] \atop [l]}\right) \quad .$$
Ein Vergleich der erhaltenen Gleichungen für σ^{-1} und τ^{-1} ergibt die Behauptung. $\square$

3 Tableaux

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

3.1 Definition Wir definieren auf $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ eine Halbordnung $\leq$ durch:
$$(u,v) \leq (x,y) \quad :\Longleftrightarrow \quad u \leq x \text{ und } v \leq y \quad ,$$
und eine lineare Ordnung $\rightarrow$ durch:
$$(u,v) \rightarrow (x,y) \quad :\Longleftrightarrow \quad u > x \text{ oder } (u = x \text{ und } v \leq y) \quad .$$
Wenn wir im folgenden Teilmengen von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ skizzieren, zeichnen wir die erste Koordinate wachsend von oben nach unten und die zweite wachsend von links nach rechts:



3.2 Definition Eine endliche bzgl. $\leq$ konvexe Teilmenge R von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ heißt *Rahmen.* Mit $\leq_R$ und $\rightarrow_R$ bezeichnen wir die Einschränkungen der Halbordnung $\leq$ bzw. der linearen Ordnung $\rightarrow$ von $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ auf R .

Wir setzen $n := |R|$. Dann gibt es genau eine monotone Bijektion ι_R von $[n]$ auf R ; dabei bezieht sich monoton auf die natürliche Anordnung in $[n]$ und die lineare Ordnung $\rightarrow_R$ auf R .

Ein Wort $w \in \mathbf{N}^n$ heißt *Standard-Tableau*[4] der Gestalt R , wenn $w = \iota_R\, \alpha$ ist für eine Abbildung $\alpha : R \to \mathbf{N}$ mit

$$\begin{aligned} x \leq_R y \quad &\Longrightarrow \quad x\alpha \leq y\alpha \quad , \\ x \neq y\, ,\, x \leq_R y\, ,\, y \to_R x \quad &\Longrightarrow \quad x\alpha < y\alpha \quad . \end{aligned}$$

Die Menge aller Standard-Tableaux der Gestalt R bezeichnen wir mit ST^R .

Eine Permutation aus

$$\mathrm{SYT}^R := \mathrm{ST}^R \cap S_n$$

heißt *Standard-Young-Tableau* der Gestalt R .

3.3 Definition Für alle Rahmen R definieren wir $\mathrm{Z}^R \in KS_{|R|} \subseteq KS$ durch:

$$\mathrm{Z}^R := \sum \mathrm{SYT}^R \quad .$$

Wir definieren einen Teilraum $\mathcal{R}$ von KS durch:

$$\mathcal{R} := \langle \mathrm{Z}^R \mid R \text{ Rahmen } \rangle_K \quad .$$

3.4 Definition Zwei Rahmen R, S heißen isomorph, wenn es eine Bijektion ϕ von R auf S gibt derart, daß ϕ und ϕ^{-1} sowohl monoton bzgl. $\leq$ als auch monoton bzgl. $\to$ sind.

3.5 Bemerkung Für je zwei isomorphe Rahmen R, S ist $\mathrm{Z}^R = \mathrm{Z}^S$.

3.6 Definition und Bemerkung Seien R ein Rahmen und $v \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Dann ist

$$R + v := \{r + v \mid r \in R\}$$

ein zu R isomorpher Rahmen.

3.7 Definition und Bemerkung Für eine Partition p ist die Menge

$$R(p) := \{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid i \leq |p| \text{ und } j \leq p_i\}$$

ein Rahmen. Ist q eine weitere Partition, so ist auch

$$R(p \setminus q) := R(p) \setminus R(q)$$

ein Rahmen.

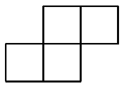
3.8 Bemerkung Jeder Rahmen ist isomorph zu $R(p \setminus q)$ für geeignete Partitionen p, q .

[4] Die hier gegebenen Definition von Standard-Tableaux läßt sich leicht als Spezialfall des auf Stanley zurückgehenden Begriffs der *P-Partition* erkennen, siehe Definition 2.2 in [14] .

3.9 Definition Der Kürze halber verwenden wir die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ST}^p &:= \mathrm{ST}^{R(p)} \\
\mathrm{ST}^{p\setminus q} &:= \mathrm{ST}^{R(p\setminus q)} \\
\mathrm{SYT}^p &:= \mathrm{SYT}^{R(p)} \\
\mathrm{SYT}^{p\setminus q} &:= \mathrm{SYT}^{R(p\setminus q)} \\
\mathrm{Z}^p &:= \mathrm{Z}^{R(p)} \\
\mathrm{Z}^{p\setminus q} &:= \mathrm{Z}^{R(p\setminus q)}
\end{aligned}$$

3.10 Beispiel Betrachten wir den Rahmen $R(32 \setminus 1)$:



,

so lassen sich die monotonen Bijektionen von $R(32 \setminus 1)$ auf die Menge $[4]$ wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{|c|c|c} \cline{2-3} \multicolumn{1}{c|}{} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline 1 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} \cline{2-3} \multicolumn{1}{c|}{} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 1 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} \cline{2-3} \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline 2 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} \cline{2-3} \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 2 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} \cline{2-3} \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline 3 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array} \quad .$$

Man sieht:

$$\mathrm{Z}^{32\setminus 1} = 1324 + 1423 + 2314 + 2413 + 3412 \quad .$$

3.11 Satz Seien R und S Rahmen. Seien r das größte Element von R und s das kleinste Element von S bzgl. der linearen Ordnung $\to$.

Wir setzen

$$S' := S - s + r + (1, -1)$$

und

$$S_1 := S' + (1, 0) \quad , \quad S_2 := S' - (0, 1) \quad .$$

Dann ist $R \cup S'$ ein Rahmen, und es gilt:

$$\mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^S = \mathrm{Z}^{R\cup S'} = \mathrm{Z}^{R\cup S_1} + \mathrm{Z}^{R\cup S_2} \quad .$$

Beweis: Nach 3.6 und 3.5 ist

$$\mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^S = \mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^{S'} \quad .$$

Wir setzen $k := |R|$, $l := |S'|$ und $n := k + l$. Sei $\pi \in S_n$.

Einerseits ist $\left\langle \mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^{S'}, \pi \right\rangle \in \{0, 1\}$ und genau dann gleich 1 , wenn $\sigma \in \mathrm{SYT}^R$ und $\tau \in \mathrm{SYT}^{S'}$ existieren mit

$$\sigma\binom{[k]}{[k]\pi}\,\tau\binom{[l]}{[n]\setminus[k]\pi} = \pi \quad .$$

In diesem Fall existieren monotone Bijektionen α_1 von R auf $[k]$ und α_2 von S' auf $[l]$ mit $\sigma = \iota_R\,\alpha_1$ und $\tau = \iota_{S'}\,\alpha_2$, und es gilt mit 2.3 und der Definition der Konkatenation von Worten:

$$\begin{aligned}
\pi &= \sigma\left(\begin{smallmatrix}[k]\\ [k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[k]} \cup \left(\begin{smallmatrix}[n]\setminus[k]\\ [l]\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[n]\setminus[k]}\ \tau\ \left(\begin{smallmatrix}[l]\\ [n]\setminus[k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[l]} \\
&= \iota_R\,\alpha_1\left(\begin{smallmatrix}[k]\\ [k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[k]} \cup \left(\begin{smallmatrix}[n]\setminus[k]\\ [l]\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[n]\setminus[k]}\ \iota_{S'}\,\alpha_2\ \left(\begin{smallmatrix}[l]\\ [n]\setminus[k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[l]} \\
&= \left(\iota_R \cup \left(\begin{smallmatrix}[n]\setminus[k]\\ [l]\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[n]\setminus[k]}\ \iota_{S'}\right)\ \left(\alpha_1\left(\begin{smallmatrix}[k]\\ [k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[k]} \cup \alpha_2\left(\begin{smallmatrix}[l]\\ [n]\setminus[k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[l]}\right) \\
&= \iota_{R\cup S'}\left(\alpha_1\left(\begin{smallmatrix}[k]\\ [k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[k]} \cup \alpha_2\left(\begin{smallmatrix}[l]\\ [n]\setminus[k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[l]}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Andererseits ist $\left\langle \mathrm{Z}^{R\cup S'}, \pi\right\rangle \in \{0,1\}$ und genau dann gleich 1 , wenn eine monotone Bijektion α von $R \cup S'$ auf $[n]$ existiert mit $\pi = \iota_{R\cup S'}\,\alpha$.

Wählt man α bei gegebenen α_1 , α_2 , bzw. umgekehrt, mit

$$\alpha = \left(\alpha_1\left(\begin{smallmatrix}[k]\\ [k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[k]} \cup \alpha_2\left(\begin{smallmatrix}[l]\\ [n]\setminus[k]\pi\end{smallmatrix}\right)\Big|_{[l]}\right) \quad ,$$

so ergibt sich

$$\left\langle \mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^{S'}, \pi\right\rangle = \left\langle \mathrm{Z}^{R\cup S'}, \pi\right\rangle \quad ,$$

und somit

$$\mathrm{Z}^R \bullet \mathrm{Z}^{S'} = \mathrm{Z}^{R\cup S'} \quad .$$

Ferner gilt:

$$\mathrm{Z}^{R\cup S'} = \sum_{\substack{\pi\in \mathrm{SYT}^{R\cup S'}\\ \pi_k < \pi_{k+1}}} \pi + \sum_{\substack{\pi\in \mathrm{SYT}^{R\cup S'}\\ \pi_k > \pi_{k+1}}} \pi = \mathrm{Z}^{R\cup S_1} + \mathrm{Z}^{R\cup S_2} \quad .$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

3.12 Bemerkung Es ist

$$\emptyset = \mathrm{Z}^{\emptyset} \in \mathcal{R} \quad .$$

3.13 Satz Sind R ein Rahmen und I ein Ideal in R bzgl. der Halbordnung $\leq_R$, so sind auch I und $R \setminus I$ Rahmen.

Für alle Rahmen R gilt:

$$\mathrm{Z}^R\Big\downarrow = \sum_{I \trianglelefteq R} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R\setminus I} \quad .$$

Beweis: Wir setzen $n := |R|$.

Sei $k \in \mathbf{N}_0$. Für alle $I \trianglelefteq R$ mit $|I| = k$ setzen wir

$$\mathrm{SYT}^R_I := \{\pi \in \mathrm{SYT}^R \mid [k]\,\pi^{-1}\,\iota_R = I\} \quad .$$

Ist $\pi \in \mathrm{SYT}^R$, so existiert eine monotone Bijektion α von R auf $[n]$ mit $\iota_R\,\alpha = \pi$. Setzen wir $I := [k]\,\pi^{-1}\,\iota_R$, so ist $\pi \in \mathrm{SYT}^R_I$. Dann ist $|I| = k$, und aus $[k] \trianglelefteq \mathbf{N}$ und $I = [k]\,\alpha^{-1}$ folgt mit der Monotonie von α , daß $I \trianglelefteq R$ ist.

Also ist

$$\mathrm{SYT}^R = \bigcup_{\substack{I \trianglelefteq R\\ |I|=k}} \mathrm{SYT}^R_I \quad ;$$

diese Vereinigung ist offensichtlich disjunkt.

Durch

$$\pi \mapsto \left(\pi\binom{[k]}{[k]}, \pi\binom{[n]\setminus[k]}{[n-k]}\right)$$

ist eine Bijektion von SYT^R_I auf $\mathrm{SYT}^I \times \mathrm{SYT}^{R\setminus I}$ definiert.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^R\Big\downarrow &= \sum_{\pi\in\mathrm{SYT}^R} \pi\!\downarrow \\
&= \sum_{\pi\in\mathrm{SYT}^R} \sum_{k=0}^{n} \pi\binom{[k]}{[k]} \otimes \pi\binom{[n]\setminus[k]}{[n-k]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \trianglelefteq R\\ |I|=k}} \sum_{\pi\in\mathrm{SYT}^R_I} \pi\binom{[k]}{[k]} \otimes \pi\binom{[n]\setminus[k]}{[n-k]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \trianglelefteq R\\ |I|=k}} \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathrm{SYT}^I\times\mathrm{SYT}^{R\setminus I}} \sigma\otimes\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \trianglelefteq R\\ |I|=k}} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R\setminus I} \\
&= \sum_{I \trianglelefteq R} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R\setminus I} \quad .
\end{aligned}$$

□

Mit 3.11, 3.13 und 3.12 ist $\mathcal{R} = \langle \mathrm{Z}^R \mid R \text{ Rahmen} \rangle_K$ eine Teilbialgebra mit Einselement von KS . Wir nennen diese Bialgebra kurz die *Rahmenalgebra*.

4 Klassenfunktionen

Sei K ein Körper. Sei G eine endliche Gruppe.

Ist D eine Darstellung von G , d.h. ein Homomorphismus von G nach $\mathrm{GL}_K(V)$, wobei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K ist, so heißt die Abbildung $\chi_D : G \to K$, definiert durch $g \mapsto \mathrm{spur}\, D(g)$, *Charakter* der Darstellung D . Charaktere sind Klassenfunktionen, d.h. sie sind konstant auf Konjugiertenklassen von G . Den Vektorraum aller Klassenfunktionen von G bezeichnen wir mit $\mathcal{C}\ell\, G$.

Hat K die Charakteristik Null, so wird eine Darstellung bis auf Äquivalenz durch ihren Charakter festgelegt. Im folgenden nehmen wir stets an, daß K ein Körper der Charakteristik Null ist.

Eine Darstellung $D : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ bzw. ihr Charakter χ_D heißt irreduzibel, wenn es keinen von $\{0\}$ und V verschiedenen Teilraum $U \leq V$ gibt mit $U\, D(G) \subseteq U$.

Für zwei Darstellungen $D_1 : G \to \mathrm{GL}_K(V_1)$ und $D_2 : G \to \mathrm{GL}_K(V_2)$ und deren durch

$$(D_1 \oplus D_2)(g)(v_1, v_2) := D_1(v_1)(g) + D_2(v_2)(g) \quad \text{für alle } g \in G, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$$

definierte Summe

$$D_1 \oplus D_2 : G \to \mathrm{GL}_K(V_1 \oplus V_2)$$

gilt

$$\chi_{D_1 \oplus D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} \quad .$$

Da K die Charakteristik Null besitzt, ist jede Darstellung bis auf Äquivalenz Summe von irreduziblen Darstellungen. Man kann sagen, daß ein wesentlicher Teil der Darstellungstheorie darin besteht, eine gegebene Darstellung in diesem Sinne in irreduzible Darstellungen zu zerlegen, bzw. einen gegebenen Charakter als $\mathbf{N}_0$–Linearkombination von irreduziblen Charakteren zu schreiben.

Eine wunderbare Möglichkeit mit irreduziblen Charakteren zu rechnen eröffnet das wie folgt auf $\mathcal{C}\ell\, G$ definierte Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)_G$:

$$(\phi\,, \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\, \psi(g^{-1}) \quad .$$

Dann ist das Skalarprodukt eines Charakters mit einem irreduziblen Charakter gerade die Vielfachheit in obiger Zerlegung; das liegt daran, daß die irreduziblen Charaktere eine bzgl. $(\cdot\,,\cdot)_G$ orthonormale Teilmenge der Menge aller Charaktere von G bilden.

Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Ist ψ eine Klassenfunktion von G , so ist deren Einschränkung $\psi|_H$ eine Klassenfunktion von H , die sogenannte *Restriktion.* Dabei sind Restriktionen von Charakteren wiederum Charaktere. Ist ϕ eine Klassenfunktion von H , so ist die sogenannte *induzierte* Funktion

$$\phi^G : G \to K \quad , \quad g \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \phi(x^{-1}gx)$$

eine Klassenfunktion von G . Die induzierte Funktion eines Charakters ist wiederum ein Charakter.

Die Konzepte Induktion, Restriktion und Skalarprodukt sind über das *Reziprozitätsgesetz von Frobenius* miteinander verknüpft:

$$\left(\phi^G , \psi\right)_G = (\phi , \psi|_H)_H \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}\ell\ H \text{ und } \psi \in \mathcal{C}\ell\ G \quad .$$

Sind G_1 , G_2 zwei Gruppen und $\phi_1 \in \mathcal{C}\ell\ G_1$, $\phi_2 \in \mathcal{C}\ell\ G_2$, so ist die durch

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1, g_2) := \phi_1(g_1)\phi_2(g_2)$$

definierte Funktion

$$\phi_1 \otimes \phi_2 : G_1 \times G_2 \to K$$

eine Klassenfunktion des direkten Produktes $G_1 \times G_2$.

Wie üblich identifizieren wir $\mathcal{C}\ell\ (G_1 \times G_2)$ mit $\mathcal{C}\ell\ G_1 \otimes \mathcal{C}\ell\ G_2$.

Kommen wir nun zur Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen. In diesem Fall spielen die sogenannten Young-Untergruppen eine ausgezeichnete Rolle:

4.1 Definition und Bemerkung Seien $n \in \mathbf{N}$ und $q \models n$.
Wir setzen $k := |q|$. Für alle $i \in [k]$ setzen wir

$$Q_i := [q_i] + \sum_{j=1}^{i-1} q_j$$

und nennen

$$Q := (Q_1, Q_2, \ldots, Q_k)$$

die Standard-Zerlegung von $[n]$ zu q .

Dann heißt die Untergruppe

$$S_q := \{\pi \in S_n \mid Q_i\pi \subseteq Q_i \text{ für alle } i \in [|Q|]\}$$

Young-Untergruppe zu q .

Die Gruppe S_q ist isomorph zu dem direkten Produkt $S_{q_1} \times S_{q_2} \times \ldots \times S_{q_k}$ von symmetrischen Gruppen. Der Einfachheit halber nehmen wir hier im folgenden o.B.d.A. Gleichheit an.

Nun betrachten wir Klassenfunktionen aller symmetrischen Gruppen zugleich:

4.2 Definition und Bemerkung Wir setzen

$$\mathcal{C} := \bigoplus_{n \in \mathbf{N}_0} \mathcal{C}\ell\ S_n \quad .$$

Sind $k, l \in \mathbf{N}_0$ und $\phi \in \mathcal{C}\ell\ S_k$, $\psi \in \mathcal{C}\ell\ S_l$, so ist $\phi \otimes \psi \in \mathcal{C}\ell\ S_{kl}$, und wir definieren $\phi \bullet \psi \in \mathcal{C}\ell\ S_{k+l}$ durch:

$$\phi \bullet \psi := (\phi \otimes \psi)^{S_{k+l}} \quad .$$

Durch bilineare Fortsetzung erhalten wir ein kommutatives Produkt $\bullet$ auf $\mathcal{C}$. Auf $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ definieren wir dann wie üblich eine Multiplikation durch

$$(\phi_1 \otimes \phi_2) \bullet (\psi_1 \otimes \psi_2) := \phi_1 \bullet \psi_1 \otimes \phi_2 \bullet \psi_2$$

und bilineare Fortsetzung.

Sind $n \in \mathbf{N}_0$ und $\rho \in \mathcal{C}\ell\ S_n$, so ist $\rho|_{S_{kl}} \in \mathcal{C}\ell\ S_{kl}$ für alle $k, l \in \mathbf{N}_0$ mit $k + l = n$. Wir definieren $\rho\!\downarrow\, \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ durch:

$$\rho\!\downarrow\, := \sum_{k+l=n} \rho|_{S_{kl}} \quad .$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir ein Coprodukt $\downarrow$ auf $\mathcal{C}$.

Wir erhalten wiederum eine Bialgebra, denn wie sich im nächsten Kapitel herausstellen wird, ist $\mathcal{C}$ mit dem Produkt $\bullet$ und dem Coprodukt $\downarrow$ homomorphes Bild der Bialgebra $\mathcal{R}$.

4.3 Bemerkung und Definition Jede Permutation π ist konjugiert zu ihrer Inversen π^{-1} . Also gilt für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und $\phi, \psi \in \mathcal{C}\ell\ S_n$:

$$(\phi\,,\psi)_{S_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \phi(\pi)\, \psi(\pi) \quad .$$

Durch die Forderung, daß Klassenfunktionen von je zwei verschiedenen symmetrischen Gruppen orthogonal sind, und durch bilineare Fortsetzung erhalten wir ein Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$ auf $\mathcal{C}$. Auf $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ definieren wir dann ein Skalarprodukt wie üblich durch

$$(\phi_1 \otimes \phi_2\,, \psi_1 \otimes \psi_2) := (\phi_1\,, \psi_1)\ (\phi_2\,, \psi_2)$$

und bilineare Fortsetzung.

Nun erhält das Reziprozitätsgesetz von Frobenius die folgende Gestalt:

4.4 Bemerkung Für alle $\phi, \psi, \rho \in \mathcal{C}$ gilt:

$$(\phi \bullet \psi\,, \rho) = (\phi \otimes \psi\,, \rho\!\downarrow) \quad .$$

5 Ein Epimorphismus

Die Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppen sind gegeben durch die Zykelpartitionen von Permutationen: Eine gegebene Permutation $\pi \in S_n$ schreibe man als Produkt von disjunkten Zykeln und sortiere die dabei auftretenden Längen der Größe nach fallend; die so erhaltene Partition $p \vdash n$ heißt *Zykelpartition* von π . Zwei Permutationen sind genau dann konjugiert zueinander, wenn ihre Zykelpartitionen gleich sind.

5.1 DEFINITION Für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und $q \models n$ setzen wir

$$C_q := \{\pi \in S_n \mid \text{die Zykelpartition von } \pi \text{ ist assoziiert zu } q\} \quad ,$$

$$q? := \frac{n!}{|C_q|}$$

und definieren $\mathrm{ch}_q \in \mathcal{C}\ell\, S_n$ durch:

$$\mathrm{ch}_q(\pi) := \begin{cases} q? & \text{falls } \pi \in C_q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } \pi \in S_n \quad .$$

5.2 BEMERKUNG Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$q? = \prod_{k \in \mathbf{N}} \left(|q|_k! \; k^{|q|_k} \right) \quad .$$

5.3 BEMERKUNG Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$(\mathrm{ch}_q \,, \mathrm{ch}_r) = \begin{cases} q? & \text{falls } q \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

5.4 BEMERKUNG Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\mathrm{ch}_q \bullet \mathrm{ch}_r = \mathrm{ch}_{qr} \quad .$$

BEWEIS: Seien $k, l \in \mathbf{N}_0$ und $q \models k$, $r \models l$. Setze $n := k + l$. Sei $p \vdash n$.
Einerseits gilt dann:

$$\begin{aligned} (\mathrm{ch}_q \bullet \mathrm{ch}_r \,, \mathrm{ch}_p)_{S_n} &= \left(\mathrm{ch}_q \otimes \mathrm{ch}_r \,, \mathrm{ch}_p|_{S_{kl}} \right)_{S_{kl}} \\ &= \frac{1}{|S_{kl}|} \sum_{(\sigma,\tau) \in S_{kl}} \underbrace{\mathrm{ch}_q(\sigma)\, \mathrm{ch}_r(\tau)\, \mathrm{ch}_p(\sigma, \tau)}_{(*)} \quad . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $(*)$ ist genau dann ungleich Null, wenn $\sigma \in C_q$, $\tau \in C_r$ und $qr \approx p$ gilt.
Also gilt, falls $qr \approx p$:

$$(\mathrm{ch}_q \bullet \mathrm{ch}_r \,, \mathrm{ch}_p)_{S_n} = \frac{1}{|S_{kl}|} |C_q|\, |C_r|\, q?\, r?\, (qr)? = (qr)? \quad .$$

Sonst ist $(\mathrm{ch}_q \bullet \mathrm{ch}_r \,, \mathrm{ch}_p)_{S_n} = 0$.
Andererseits gilt:

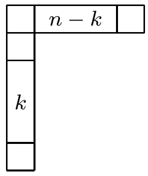
$$(\mathrm{ch}_{qr} \,, \mathrm{ch}_p) = \begin{cases} (qr)? & \text{falls } qr \approx p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Da die Menge $\{\mathrm{ch}_p \mid p \vdash n\}$ eine Basis von $\mathcal{C}\ell\, S_n$ und die Bilinearform $(\cdot\,,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist, folgt die Behauptung. $\square$

5.5 DEFINITION Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir $\omega_n \in \mathcal{R}$ durch:

$$\omega_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, \mathrm{Z}^{(n-k)1^k} \quad .$$

Dabei erscheint mir die folgende Skizze für den Rahmen $R((n-k)1^k)$ sprechend:



5.6 SATZ (DYNKIN-SPECHT-WEVER) [5]
Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\omega_n \, \omega_n = n \, \omega_n \quad .$$

5.7 DEFINITION Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ definieren wir $\omega_q \in \mathcal{R}$ durch:[6]

$$\omega_q := \omega_{q_1} \bullet \omega_{q_2} \bullet \ldots \bullet \omega_{q_{|q|}} \quad .$$

Mit 1.6 folgt sofort:

5.8 BEMERKUNG Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\omega_q \bullet \omega_r = \omega_{qr} \quad .$$

5.9 SATZ Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\omega_n\!\downarrow \, = \omega_n \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_n \quad .$$

BEWEIS: Sei $n \in \mathbf{N}$. Wegen 3.11 und 3.13 gilt für alle $k \in [n-1]_0$:

$$\mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\Big\downarrow = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n-k} \mathrm{Z}^{j1^i} \otimes (\mathrm{Z}^{1^{k-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-k-j}) + \mathrm{Z}^{\emptyset} \otimes \mathrm{Z}^{(n-k)1^k} \quad .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \omega_n\!\downarrow \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \, \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\Big\downarrow \\ &= \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n-k} \mathrm{Z}^{j1^i} \otimes (\mathrm{Z}^{1^{k-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-k-j}) + \mathrm{Z}^{\emptyset} \otimes \mathrm{Z}^{(n-k)1^k} \right) \end{aligned}$$

[5] Dieser Satz wurde unabhängig voneinander von Dynkin [3] , Specht [13] und Wever [15] als Charakterisierung der Lie-Elemente der freien assoziativen Algebra bewiesen. Daß sich dieses Resultat im wesentlichen wie hier formulieren läßt, kann man z.B. nachlesen auf Seite 3 in [1] .

[6] Die Definition dieser Elemente von KS wurde von Blessenohl und Laue in [2] gegeben.

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} \mathrm{Z}^{j1^i} \otimes \underbrace{\sum_{k=i}^{n-j}(-1)^k \mathrm{Z}^{1^{k-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-k-j}}_{(2)}}_{(1)} + \mathrm{Z}^{\emptyset} \otimes \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}}_{(3)} \quad .$$

Term (3) ist offensichtlich gleich $\emptyset \otimes \omega_n$.

Ist $j = n - i$, so ist Term (2) gleich $(-1)^i\,\emptyset$; die Summanden mit $j = n - i$ in Term (1) ergeben dann gerade $\omega_n \otimes \emptyset$.

Ist $j \neq n - i$, so ist Term (2) gleich Null:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=i}^{n-j}(-1)^k \mathrm{Z}^{1^{k-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-k-j} = \\
= \quad & (-1)^i \mathrm{Z}^{1^{i-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-i-j} + (-1)^{n-j} \mathrm{Z}^{1^{n-j-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-(n-j)-j} \\
& + \sum_{k=i+1}^{n-j-1} (-1)^k (-1)^k \mathrm{Z}^{1^{k-i}} \bullet \mathrm{Z}^{n-k-j} \\
\underset{3.11}{=} \quad & (-1)^i \mathrm{Z}^{n-i-j} + (-1)^{n-j} \mathrm{Z}^{1^{n-i-j}} \\
& + \sum_{k=i+1}^{n-j-1} (-1)^k \left(\mathrm{Z}^{(n-k-j)1^{k-i}} + \mathrm{Z}^{(n-k-j+1)1^{k-i-1}} \right) \\
= \quad & (-1)^i \mathrm{Z}^{n-i-j} + (-1)^{n-j} \mathrm{Z}^{1^{n-i-j}} \\
& + (-1)^{i+1} \mathrm{Z}^{(n-(i+1)-j+1)1^{i+1-i-1}} + (-1)^{n-j-1} \mathrm{Z}^{(n-(n-j-1)-j)1^{n-j-1-i}} \\
= \quad & 0 \quad .
\end{aligned}$$

Also ergeben die Summanden mit $j \neq n - i$ in Term (1) Null.

Insgesamt folgt die Behauptung. □

5.10 Definition Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ und $T \subseteq [|q|]$ setzen wir

$$q_T := \prod_{t \in T} q_t \quad ,$$

wobei das Produkt Konkatenation von Worten ist, und in der durch die natürliche Anordnung $\leq$ auf $[|q|]$ gegebenen Reihenfolge zu multiplizieren ist.

5.11 Korollar Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\omega_q\!\downarrow \; = \sum_{T \subseteq [|q|]} \omega_{q_T} \otimes \omega_{q_{[|q|] \setminus T}} \quad .$$

Beweis: Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_q\big\downarrow &= \left(\omega_{q_1} \bullet \ldots \bullet \omega_{q_{|q|}}\right)\Big\downarrow \\
&\underset{1.5}{=} \omega_{q_1}\big\downarrow \bullet \ldots \bullet \omega_{q_{|q|}}\Big\downarrow \\
&\underset{5.9}{=} (\omega_{q_1} \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_{q_1}) \bullet \ldots \bullet (\omega_{q_{|q|}} \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_{q_{|q|}}) \\
&\underset{5.8}{=} \sum_{T \subseteq [|q|]} \omega_{q_T} \otimes \omega_{q_{[|q|] \setminus T}} \quad .
\end{aligned}$$

□

5.12 Satz Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$(\omega_q\,, \omega_r) = \begin{cases} q? & \text{falls } q \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$(\omega_n\,, \omega_n) \underset{2.2}{=} \Big(\omega_n\, \omega_n\,, \mathrm{id}_{[n]}\Big) \underset{5.6}{=} \Big(n\, \omega_n\,, \mathrm{id}_{[n]}\Big) = n\, \Big(\omega_n\,, \mathrm{id}_{[n]}\Big) = n \cdot 1 = n = n? \quad .$$

Sind $n \in \mathbf{N}$ und $q \in \mathbf{N}^*$ mit $|q| \geq 2$, so existieren $x, y \in \mathbf{N}^* \setminus \{\emptyset\}$ mit $q = xy$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
(\omega_q\,, \omega_n) &= (\omega_{xy}\,, \omega_n) \\
&\underset{5.8}{=} (\omega_x \bullet \omega_y\,, \omega_n) \\
&\underset{2.4}{=} (\omega_x \otimes \omega_y\,,\, \omega_n\big\downarrow) \\
&\underset{5.9}{=} (\omega_x \otimes \omega_y\,, \omega_n \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_n) \\
&= (\omega_x\,, \omega_n)\, \underbrace{(\omega_y\,, \emptyset)}_{=0} + \underbrace{(\omega_x\,, \emptyset)}_{=0}\, (\omega_y\,, \omega_n) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $q \in \mathbf{N}^*$ und $n \in \mathbf{N}^*$:

$$(\omega_q\,, \omega_n) = \begin{cases} q? & \text{falls } q \approx n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Seien $a \in \mathbf{N}$ und $r \in \mathbf{N}^*$, derart daß für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$(\omega_q\,, \omega_r) = \begin{cases} q? & \text{falls } q \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Dann gilt für alle $q \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
(\omega_q\,, \omega_{ra}) &\underset{5.8}{=} (\omega_q\,, \omega_r \bullet \omega_a) \\
&\underset{2.4}{=} (\omega_q\!\downarrow, \omega_r \otimes \omega_a) \\
&\underset{5.11}{=} \left(\sum_{T \subseteq [|q|]} \omega_{q_T} \otimes \omega_{q_{[|q|] \setminus T}}\,, \omega_r \otimes \omega_a \right) \\
&= \sum_{T \subseteq [|q|]} (\omega_{q_T}\,, \omega_r) \left(\omega_{q_{[|q|] \setminus T}}\,, \omega_a\right) \\
&= a \sum_{\substack{T \subseteq [|q|] \\ q|_{[|q|] \setminus T} = a}} (\omega_{q_T}\,, \omega_r) \\
&= a \sum_{\substack{T \subseteq [|q|] \\ q_{[|q|] \setminus T} = a}} \begin{cases} q_T? & \text{falls } q_T \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad .
\end{aligned}$$

Ist $|q|_a = 0$, so folgt $(\omega_q\,, \omega_{ra}) = 0$.
Sei also $|q|_a \neq 0$. Dann existiert ein $q' \in \mathbf{N}^*$ mit $q'a \approx q$. Für alle $T \subseteq [|q|]$ mit $q_{[|q|] \setminus T} = a$ ist $q_T \approx q'$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(\omega_q\,, \omega_{ra}) &= a\,|q|_a \begin{cases} q'? & \text{falls } q' \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\underset{5.2}{=} a\,|q|_a \begin{cases} \prod_{k \in \mathbf{N}} \left(|q'|_k!\; k^{|q'|_k}\right) & \text{falls } q' \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \prod_{k \in \mathbf{N}} \left(|q|_k!\; k^{|q|_k}\right) & \text{falls } q \approx ra \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\underset{5.2}{=} \begin{cases} q? & \text{falls } q \approx ra \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad .
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{N}^*$ bzgl. der Konkatenation von $\mathbf{N}$ erzeugt wird, folgt insgesamt die Behauptung. $\square$

5.13 Definition Wir definieren eine Teilbialgebra $\mathcal{D}$ von $\mathcal{R}$ [7] :

$$\mathcal{D} := \langle \omega_q \mid q \in \mathbf{N}^* \rangle_K \quad .$$

5.14 Definition Wir definieren eine Abbildung $c : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{C}$ durch

$$c(\phi)(C_p) = (\phi\,, \omega_p) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}_0 \ , p \vdash n \text{ und } \phi \in \mathcal{R} \cap KS_n$$

und anschließende lineare Fortsetzung.[8]

5.15 Bemerkung Mit 5.12 gilt für alle $q \in \mathbf{N}^*$:

$$c(\omega_q) = \mathrm{ch}_q \quad .$$

Insbesondere ist c surjektiv auf $\mathcal{C}$.

5.16 Definition und Satz [9]
Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf S_n als die kleinste Äquivalenzrelation derart, daß $(k, k+1)\,\pi \sim \pi$ gilt für alle $k \in [n-1]$ und $\pi \in S_n$, wenn $(k-1)\pi$ oder $(k+2)\pi$, sofern sie existieren, bzgl. der natürlichen Anordnung $\leq$ auf $[n]$ zwischen $k\pi$ und $(k+1)\pi$ liegt.

Für jede Permutation $\pi \in S_n$ existiert genau ein Standard-Young-Tableau $P(\pi) \in S_n$ mit $P(\pi) \sim \pi$. Wir setzen $Q(\pi) := P(\pi^{-1})$.

Die Abbildung $\pi \mapsto (P(\pi), Q(\pi))$ ist eine Bijektion von S_n auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{p \vdash n} \mathrm{SYT}^p \times \mathrm{SYT}^p$.

Beweis: Man betrachte Theorem A in Verbindung mit Theorem B und Exercise 5 in [9] , Abschnitt 5.1.4 . □

5.17 Lemma Sei R ein Rahmen. Wir setzen $n := |R|$. Für alle $\pi \in S_n$ gilt:

$$\pi \in \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1} \iff P(\pi) \in \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1} \quad .$$

Beweis: Wir haben für k und π wie in 5.16 zu zeigen:

$$\pi^{-1} \in \mathrm{SYT}^R \quad \Longrightarrow \quad ((k, k+1)\pi)^{-1} \in \mathrm{SYT}^R \quad .$$

Ist $\pi^{-1} \in \mathrm{SYT}^R$, so existiert eine monotone Abbildung $\alpha : R \to [n]$ mit $\pi^{-1} = \iota_R \alpha$. Wir zeigen, daß $k\alpha^{-1}$ und $(k+1)\alpha^{-1}$ unvergleichbar sind bzgl. $\leq_R$, denn dann ist auch $\alpha(k, k+1)$ monoton, und mit

$$((k, k+1)\pi)^{-1} = \pi^{-1}(k, k+1) = \iota_R\, \alpha\, (k, k+1)$$

[7] Solomon entdeckte, daß $\mathcal{D}_n := \mathcal{D} \cap KS_n$ mit dem durch Hintereinanderausführung von Permutationen gegebenen Produkt eine Teilalgebra von KS_n ist. Dieses bemerkenswerte Resultat findet sich in [12] in dem allgemeineren Kontext von Coxeter-Gruppen.

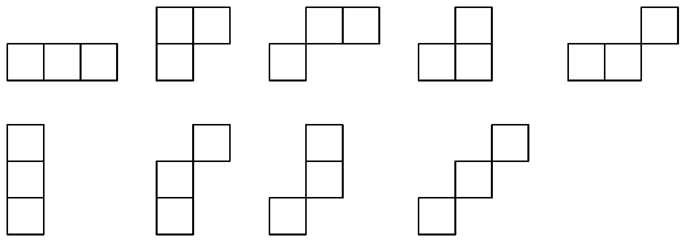
[8] Die Abbildung $c|_{\mathcal{D}_n}$ ist gerade der von Solomon in [12] betrachtete Epimorphismus, was im wesentlichen die Aussage von 6.6 ist.

[9] Die hier formulierten Resultate gehen zurück auf Knuth, Robinson, Schensted und Schützenberger, siehe Seite 60 in [9].

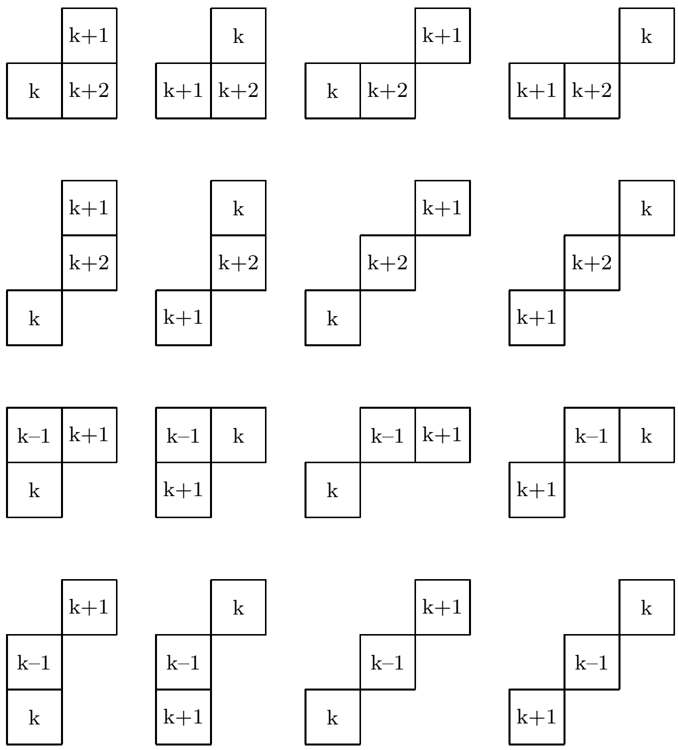
folgt

$$((k, k+1)\pi)^{-1} \in \mathrm{SYT}^R \quad .$$

Wir betrachten $T := \{k, k+1, k+2\}\alpha^{-1}$ bzw. $T := \{k-1, k, k+1\}\alpha^{-1}$. Die Teilmenge T des Rahmens R ist wegen der Monotonie von α selbst schon ein Rahmen. Man überlegt sich leicht, daß T bis auf Isomorphie von Rahmen wie folgt aussieht:



Die Zahlen $k, k+1, k+2$ bzw. $k-1, k, k+1$ sind derart einzutragen, daß $k\alpha^{-1} \to (k+2)\alpha^{-1} \to (k+1)\alpha^{-1}$ oder $(k+1)\alpha^{-1} \to (k+2)\alpha^{-1} \to k\alpha^{-1}$ bzw. $k\alpha^{-1} \to (k-1)\alpha^{-1} \to (k+1)\alpha^{-1}$ oder $(k+1)\alpha^{-1} \to (k-1)\alpha^{-1} \to k\alpha^{-1}$ gilt. Wegen der Monotonie von α bleiben nur die folgenden Fälle für $\alpha|_T$ übrig:



In keinem dieser Fälle sind $k\alpha^{-1}$ und $(k+1)\alpha^{-1}$ vergleichbar. $\square$

5.18 Definition Wir definieren eine lineare Abbildung von $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{R}$ durch:

$$\widetilde{\cdot} : \phi \mapsto \sum_{p \text{ Partition}} (\mathrm{Z}^p \,, \phi)\ \mathrm{Z}^p \quad .$$

5.19 Lemma Für alle $\phi, \psi \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\left(\widetilde{\phi} \,, \psi\right) = (\phi \,, \psi) \quad .$$

Beweis: Es genügt für alle Rahmen R, S zu zeigen:

$$\left(\widetilde{\mathrm{Z}^R} \,, \mathrm{Z}^S\right) = \left(\mathrm{Z}^R \,, \mathrm{Z}^S\right) \quad .$$

Seien R, S Rahmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\mathrm{Z}^R} , \mathrm{Z}^S\right) &= \sum_p \left(\mathrm{Z}^p \,, \mathrm{Z}^R\right) \left(\mathrm{Z}^p \,, \mathrm{Z}^S\right) \\
&= \left| \bigcup_p \left(\mathrm{SYT}^p \cap \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1}\right) \times \left(\mathrm{SYT}^p \cap \left(\mathrm{SYT}^S\right)^{-1}\right) \right| \quad , \\
\left(\mathrm{Z}^R , \mathrm{Z}^S\right) &= \left| \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1} \cap \mathrm{SYT}^S \right| \quad .
\end{aligned}$$

Ist $|R| \neq |S|$, so gilt offensichtlich:

$$\left(\widetilde{\mathrm{Z}^R} \,, \mathrm{Z}^S\right) = 0 = \left(\widetilde{\mathrm{Z}^R} \,, \mathrm{Z}^S\right) \quad .$$

Es gelte: $|R| = |S|$. Wir setzen $n := |R|$. Um den Beweis abzuschließen, benutzen wir die Bijektion aus 5.16 . Nach 5.17 gilt für alle $\pi \in S_n$:

$$\pi \in \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1} \iff P(\pi) \in \left(\mathrm{SYT}^R\right)^{-1} \quad .$$

Ferner erhalten wir für alle $\pi \in S_n$:

$$\pi \in \mathrm{SYT}^S \iff \pi^{-1} \in \left(\mathrm{SYT}^S\right)^{-1} \iff Q(\pi) = P(\pi^{-1}) \in \left(\mathrm{SYT}^S\right)^{-1} \quad .$$

Insgesamt ergibt sich die Behauptung. $\square$

5.20 Lemma Es gilt:

$$\text{Kern}\,\widetilde{\cdot} = \text{Rad}\,\mathcal{R} = \text{Kern}\, c \quad \text{und} \quad \mathcal{R} = \mathcal{D} + \text{Rad}\,\mathcal{R} \quad ,$$

wobei mit Rad $\mathcal{R}$ das Radikal der Bilinearform $(\cdot \,, \cdot)$ auf $\mathcal{R}$ bezeichnet wird.

Beweis: Für alle $x \in \text{Kern}\,\widetilde{\cdot}$ und $y \in \mathcal{R}$ gilt:

$$(x \,, y) \underset{5.19}{=} (\widetilde{x} \,, y) = (0 \,, y) = 0 \quad ,$$

also

$$\text{Kern}\,\tilde{\cdot} \subseteq \text{Rad}\,\mathcal{R} \quad .$$

Nach Definition der Abbildung c gilt:

$$\text{Kern}\, c = \{x \in \mathcal{R} \mid (x\,, \omega_p) = 0 \text{ für alle Partitionen } p\} \supseteq \text{Rad}\,\mathcal{R} \quad .$$

Also gilt:

$$\text{Kern}\,\tilde{\cdot} \subseteq \text{Rad}\,\mathcal{R} \subseteq \text{Kern}\, c \quad .$$

Dann zeigt das folgende Dimensions-Argument in $\mathcal{R}_n := \mathcal{R} \cap KS_n$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ die erste Behauptung:

$$\begin{array}{rcl} p(n) & \geq & \dim \langle \mathrm{Z}^p \mid p \vdash n \rangle_K \\ & \geq & \text{codim Kern}\,\tilde{\cdot} \\ & \geq & \text{codim Rad}\,\mathcal{R}_n \\ & \geq & \text{codim Kern}\, c \\ & \underset{5.15}{=} & \dim \mathcal{C}\ell\ S_n \\ & = & p(n) \quad . \end{array}$$

Zusätzlich erhalten wir codim Rad $\mathcal{R}_n = p(n)$.

Nach 5.12 gilt:

$$(\omega_p\,, \omega_q) = \begin{cases} p? & \text{für } p = q \\ 0 & \text{für } p \neq q \end{cases} \qquad \text{für alle } p, q \vdash n \quad ,$$

also ist der Schnitt des $p(n)$–dimensionalen Teilraums $\langle \omega_p \mid p \vdash n \rangle_K$ von $\mathcal{D} \cap KS_n$ mit Rad $\mathcal{R}_n$ trivial.

Es folgt die zweite Behauptung. $\square$

5.21 Lemma Die lineare Abbildung $c : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ ist ein Homomorphismus in dem Sinne, daß für alle $\phi, \psi \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\phi\,, \psi) & = & (c(\phi)\,, c(\psi)) \quad , \\ c(\phi \bullet \psi) & = & c(\phi) \bullet c(\psi) \quad , \\ (c \otimes c)(\phi{\downarrow}) & = & c(\phi){\downarrow} \quad . \end{array}$$

Beweis: Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$(\omega_q\,, \omega_r) \underset{5.12}{=} \left\{ \begin{array}{ll} q? & \text{falls } q \approx r \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \underset{5.3}{=} (\text{ch}_q\,, \text{ch}_r) \underset{5.15}{=} (c(\omega_q)\,, c(\omega_r))$$

und

$$c(\omega_q \bullet \omega_r) \underset{5.8}{=} c(\omega_{qr}) \underset{5.15}{=} \text{ch}_{qr} \underset{5.4}{=} \text{ch}_q \bullet \text{ch}_r \underset{5.15}{=} c(\omega_q) \bullet c(\omega_r) \quad .$$

Da $\mathcal{D} = \langle \omega_q \mid q \in \mathbf{N}^* \rangle_K$ ist, folgt für alle $\phi, \psi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} (\phi\,,\psi) &= (c(\phi)\,,c(\psi)) \quad , \\ c(\phi \bullet \psi) &= c(\phi) \bullet c(\psi) \quad . \end{aligned}$$

Seien $\phi, \psi \in \mathcal{R}$. Nach 5.20 existieren $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{D}$ und $\phi_2, \psi_2 \in \operatorname{Rad} \mathcal{R}$ mit $\phi = \phi_1 + \phi_2$ und $\psi = \psi_1 + \psi_2$; darüber hinaus sind $\phi_2, \psi_2 \in \operatorname{Kern} c$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\phi\,,\psi) &= (\phi_1 + \phi_2\,, \psi_1 + \psi_2) \\ &= (\phi_1\,,\psi_1) + (\phi_1\,,\psi_2) + (\phi_2\,,\psi_1) + (\phi_2\,,\psi_2) \\ &= (\phi_1\,,\psi_1) \\ &= (c(\phi_1)\,,c(\psi_1)) \\ &= (c(\phi_1)\,,c(\psi_1)) + (c(\phi_1)\,,c(\psi_2)) + (c(\phi_2)\,,c(\psi_1)) + (c(\phi_2)\,,c(\psi_2)) \\ &= (c(\phi_1) + c(\phi_2)\,, c(\psi_1) + c(\psi_2)) \\ &= (c(\phi_1 + \phi_2)\,, c(\psi_1 + \psi_2)) \\ &= (c(\phi)\,,c(\psi)) \quad . \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathcal{R}$, $y \in \operatorname{Rad} \mathcal{R}$ und Rahmen R gilt:

$$\begin{aligned} \left(x \bullet y\,, \mathrm{Z}^R\right) &\underset{2.4}{=} \left(x \otimes y\,,\, \mathrm{Z}^R\big\downarrow\right) \\ &\underset{3.13}{=} \left(x \otimes y\,, \sum_{I \trianglelefteq R} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R \setminus I}\right) \\ &= \sum_{I \trianglelefteq R} \left(x\,, \mathrm{Z}^I\right) \underbrace{\left(y\,, \mathrm{Z}^{R\setminus I}\right)}_{=0} \\ &= 0 \quad , \end{aligned}$$

also ist auch $x \bullet y \in \operatorname{Rad} \mathcal{R}$, ebenso ist $y \bullet x \in \operatorname{Rad} \mathcal{R}$. Also ist $\operatorname{Rad} \mathcal{R}$ und damit auch Kern c ein Ideal von $\mathcal{R}$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} c(\phi \bullet \psi) &= c((\phi_1 + \phi_2) \bullet (\psi_1 + \psi_2)) \\ &= c(\phi_1 \bullet \psi_1 + \phi_1 \bullet \psi_2 + \phi_2 \bullet \psi_1 + \phi_2 \bullet \psi_2) \\ &= c(\phi_1 \bullet \psi_1) + c(\phi_1 \bullet \psi_2) + c(\phi_2 \bullet \psi_1) + c(\phi_2 \bullet \psi_2) \\ &= c(\phi_1 \bullet \psi_1) \\ &= c(\phi_1) \bullet c(\psi_1) \\ &= (c(\phi_1) + c(\phi_2)) \bullet (c(\psi_1) + c(\psi_2)) \\ &= c(\phi_1 + \phi_2) \bullet c(\psi_1 + \psi_2) \\ &= c(\phi) \bullet c(\psi) \quad . \end{aligned}$$

Mittels 2.4 und 4.4 folgt auch nun die verbleibende Behauptung. □

6 Charaktere

In diesem Kapitel bestimmen wir die irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppen und beweisen den Satz von Murnaghan–Nakayama. Die Strategie dabei ist im wesentlichen, Aussagen über Elemente der Rahmenalgebra zu beweisen und anschließend durch Anwendung des Epimorphismus $c : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ in Aussagen über Charaktere zu übersetzen.

Eins- und Signumcharaktere

Als erste Anwendung der bis hier entwickelten Theorie bestimmen wir Urbilder unter dem Epimorphismus c des Einscharakters, des Signumcharakters und von ihnen induzierter Charaktere.

6.1 Definition Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ definieren wir $\Xi^q \in \mathcal{R}$ wie folgt:
Für alle $n \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$\Xi^n := \mathrm{Z}^n = 1\,2\,\cdots\,n = \mathrm{id}_{[n]} \quad .$$

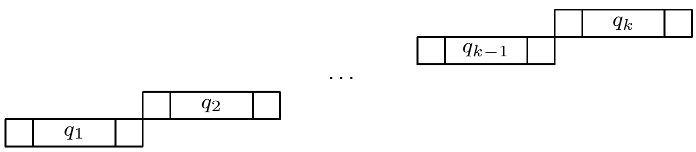
Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$\Xi^q := \Xi^{q_1} \bullet \Xi^{q_2} \bullet \ldots \bullet \Xi^{q_{|q|}} \quad .$$

6.2 Bemerkung Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\Xi^q \bullet \Xi^r = \Xi^{qr} \quad .$$

6.3 Bemerkung Sei $q \in \mathbf{N}^*$. Nach 3.11 ist $\Xi^q = \mathrm{Z}^R$ für einen geeigneten Rahmen R . Ein solcher Rahmen läßt sich wie folgt skizzieren:



6.4 Definition Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir $\xi^n \in \mathcal{C}\ell\ S_n$ durch

$$\xi^n(\pi) := 1 \quad \text{für alle } \pi \in S_n \quad .$$

Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ definieren wir $\xi^q \in \mathcal{C}$ durch:

$$\xi^q := \xi^{q_1} \bullet \xi^{q_2} \bullet \ldots \bullet \xi^{q_{|q|}} \quad .$$

6.5 Bemerkung Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ ist ξ^q ein Charakter.[10]

[10] Diese Charaktere sind gewisse Permutationscharaktere, die wir Kerber folgend, siehe [8] , Seite 170 , *Young-Charaktere* nennen.

6.6 Satz Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$c(\Xi^q) = \xi^q \quad .$$

Beweis: Wir zeigen für alle $n \in \mathbf{N}$ und $q \models n$:

$$(\Xi^n \,, \omega_q) = 1 \quad ,$$

denn dann folgt für alle $n \in \mathbf{N}$ und $p \vdash n$:

$$c(\Xi^n)(C_p) = (\Xi^n \,, \omega_p) = 1 = \xi^n(C_p) \quad ,$$

und somit für alle $q \in \mathbf{N}^*$:

$$c(\Xi^q) = c(\Xi^{q_1} \bullet \ldots \bullet \Xi^{q_{|q|}}) \underset{5.21}{=} c(\Xi^{q_1}) \bullet \ldots \bullet c(\Xi^{q_{|q|}}) = \xi^{q_1} \bullet \ldots \bullet \xi^{q_{|q|}} = \xi^q \quad .$$

Nach Definition von ω_n gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$(\Xi^n \,, \omega_n) = 1 \quad .$$

Sind $k, l \in \mathbf{N}$ und $x \models k$, $y \models l$, derart daß gilt:

$$\left(\Xi^k \,, \omega_x\right) = 1 \quad \text{und} \quad \left(\Xi^l \,, \omega_y\right) = 1 \quad ,$$

so gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\Xi^{k+l} \,, \omega_{xy}\right) &\underset{5.8}{=} \left(\Xi^{k+l} \,, \omega_x \bullet \omega_y\right) \\
&\underset{2.4}{=} \left(\Xi^{k+l}\big\downarrow \,, \omega_x \otimes \omega_y\right) \\
&\underset{3.13}{=} \left(\sum_{j=0}^{k+l} \Xi^j \otimes \Xi^{k+l-j} \,, \omega_x \otimes \omega_y\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k+l} \left(\Xi^j \,, \omega_x\right) \left(\Xi^{k+l-j} \,, \omega_y\right) \\
&= \left(\Xi^k \,, \omega_x\right) \left(\Xi^l \,, \omega_y\right) \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1 \quad .
\end{aligned}$$

Da das Monoid $\mathbf{N}^*$ mit der Konkatenation als Multiplikation von $\mathbf{N}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung. □

6.7 Definition Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ definieren wir $\hat{\Xi}^q \in \mathcal{R}$ wie folgt:
Für alle $n \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$\hat{\Xi}^n := \mathrm{Z}^{1^n} = n\,(n-1)\cdots 2\,1 \quad .$$

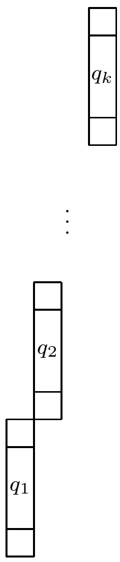
Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$\hat{\Xi}^q := \hat{\Xi}^{q_1} \bullet \hat{\Xi}^{q_2} \bullet \ldots \bullet \hat{\Xi}^{q_{|q|}} \quad .$$

6.8 Bemerkung Für alle $q, r \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\hat{\Xi}^q \bullet \hat{\Xi}^r = \hat{\Xi}^{qr} \quad .$$

6.9 Bemerkung Sei $q \in \mathbf{N}^*$. Nach 3.11 ist $\hat{\Xi}^q = \mathrm{Z}^R$ für einen geeigneten Rahmen R . Ein solcher Rahmen läßt sich wie folgt skizzieren:



6.10 Definition Für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren wir $\hat{\xi}^n \in \mathcal{C}\ell\ S_n$ durch

$$\hat{\xi}^n(\pi) := \operatorname{sgn} \pi \quad \text{für alle } \pi \in S_n \quad .$$

Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ definieren wir $\hat{\xi}^q \in \mathcal{C}$ durch:

$$\hat{\xi}^q := \hat{\xi}^{q_1} \bullet \hat{\xi}^{q_2} \bullet \ldots \bullet \hat{\xi}^{q_{|q|}} \quad .$$

6.11 Bemerkung Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ ist $\hat{\xi}^q$ ein Charakter.

6.12 Satz Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$c(\hat{\Xi}^q) = \hat{\xi}^q \quad .$$

Beweis: Wir zeigen für alle $n \in \mathbf{N}$ und $q \models n$:

$$\left(\hat{\Xi}^n, \omega_q\right) = (-1)^{n-|q|} \quad ,$$

denn dann folgt für alle $n \in \mathbf{N}$ und $p \vdash n$:

$$\begin{aligned} c(\hat{\Xi}^n)(C_p) &= \left(\hat{\Xi}^n, \omega_p\right) = (-1)^{n-|p|} \\ &= (-1)^{p_1-1}(-1)^{p_2-1} \cdots (-1)^{p_{|p|}-1} \\ &= \hat{\xi}^n(C_p) \quad , \end{aligned}$$

und somit für alle $q \in \mathbf{N}^*$:

$$c(\hat{\Xi}^q) = c(\hat{\Xi}^{q_1} \bullet \ldots \bullet \hat{\Xi}^{q_{|q|}}) \underset{5.21}{=} c(\hat{\Xi}^{q_1}) \bullet \ldots \bullet c(\hat{\Xi}^{q_{|q|}}) = \hat{\xi}^{q_1} \bullet \ldots \bullet \hat{\xi}^{q_{|q|}} = \hat{\xi}^q \quad .$$

Nach Definition von ω_n gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\left(\hat{\Xi}^n, \omega_n\right) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n-|n|} \quad .$$

Sind $k, l \in \mathbf{N}$ und $x \models k$, $y \models l$, derart daß gilt:

$$\left(\hat{\Xi}^k, \omega_x\right) = (-1)^{k-|x|} \quad \text{und} \quad \left(\hat{\Xi}^l, \omega_y\right) = (-1)^{l-|y|} \quad ,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Xi}^{k+l}, \omega_{xy}\right) &\underset{5.8}{=} \left(\hat{\Xi}^{k+l}, \omega_x \bullet \omega_y\right) \\ &\underset{2.4}{=} \left(\hat{\Xi}^{k+l}\big\downarrow, \omega_x \otimes \omega_y\right) \\ &\underset{3.13}{=} \left(\sum_{j=0}^{k+l} \hat{\Xi}^j \otimes \hat{\Xi}^{k+l-j}, \omega_x \otimes \omega_y\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k+l} \left(\hat{\Xi}^j, \omega_x\right)\left(\hat{\Xi}^{k+l-j}, \omega_y\right) \\ &= \left(\hat{\Xi}^k, \omega_x\right)\left(\hat{\Xi}^l, \omega_y\right) \\ &= (-1)^{k-|x|} \cdot (-1)^{l-|y|} \\ &= (-1)^{k+l-|xy|} \quad . \end{aligned}$$

Da das Monoid $\mathbf{N}^*$ mit der Konkatenation als Multiplikation von $\mathbf{N}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung. □

Kostka-Matrix

6.13 Definition Für alle Rahmen R definieren wir $\zeta^R \in \mathcal{C}$ durch:

$$\zeta^R := c\left(\mathrm{Z}^R\right) \quad .$$

Für alle Partitionen $p \in \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$\zeta^p := c(\mathrm{Z}^p) \quad .$$

Für alle Partitionen $p, q \in \mathbf{N}^*$ setzen wir

$$\zeta^{p\setminus q} := c(\mathrm{Z}^{p\setminus q}) \quad .$$

6.14 Satz Für alle Rahmen R und für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^q\right) = |\mathrm{ST}^R(q)| \quad .$$

Zur Definition der Menge $\mathrm{ST}^R(q)$ siehe 3.2 und Seite 6 .

Beweis: Für alle Rahmen R und $n \in \mathbf{N}$ gilt offensichtlich:

$$\left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^n\right) = \left(\mathrm{Z}^R\,,\mathrm{id}_{[n]}\right) = |\mathrm{ST}^R(n)| \quad .$$

Sind $x, y \in \mathbf{N}^*$, derart daß für alle Rahmen R gilt:

$$\left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^x\right) = |\mathrm{ST}^R(x)| \quad \text{und} \quad \left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^y\right) = |\mathrm{ST}^R(y)| \quad ,$$

so gilt für alle Rahmen R :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^{xy}\right) &\underset{6.2}{=} \left(\mathrm{Z}^R\,,\Xi^x \bullet \Xi^y\right) \\
&\underset{2.4}{=} \left(\mathrm{Z}^R\big\downarrow\,,\Xi^x \otimes \Xi^y\right) \\
&\underset{3.13}{=} \left(\sum_{I \trianglelefteq R} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R\setminus I}\,,\Xi^x \otimes \Xi^y\right) \\
&= \sum_{I \trianglelefteq R} \left(\mathrm{Z}^I\,,\Xi^x\right)\left(\mathrm{Z}^{R\setminus I}\,,\Xi^y\right) \\
&= \sum_{I \trianglelefteq R} |\mathrm{ST}^I(x)|\,|\mathrm{ST}^{R\setminus I}(y)| \quad ;
\end{aligned}$$

letzteres ist offensichtlich gleich $|\mathrm{ST}^R(xy)|$.

Da das Monoid $\mathbf{N}^*$ mit der Konkatenation als Multiplikation von $\mathbf{N}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung. $\square$

6.15 DEFINITION Wir definieren eine lineare Ordnung $\leq$ auf $\mathbf{N}^*$ durch:

$$u \leq v \quad :\Longleftrightarrow \quad u = v \quad \text{oder} \quad \exists_{k\in[|u|]}\, u_k < v_k \quad ,$$

die sogenannte *lexikographische Ordnung*.

Aus 6.14 folgt sofort:

6.16 SATZ Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist die Matrix $((\Xi^p\,, \mathrm{Z}^q))_{p,q\vdash n}$ eine obere Dreiecksmatrix bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Einsen auf der Hauptdiagonalen.

6.17 DEFINITION UND BEMERKUNG Für alle Partitionen p, q setzen wir

$$k_{pq} := (\xi^p\,, \zeta^q) \quad .$$

Dann folgt aus 6.16 mit 5.21, 6.6 und 6.13 , daß für alle $n \in \mathbf{N}_0$ die Matrix $(k_{pq})_{p,q\vdash n}$ eine obere Dreiecksmatrix bzgl. der lexikographischen Ordnung mit Einsen auf der Hauptdiagonalen ist.

Diese Matrix mit Einträgen aus $\mathbf{N}_0$ nennen wir *Kostka-Matrix*.

Irreduzible Charaktere

6.18 SATZ Sei $n \in \mathbf{N}_0$. Dann sind die irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe S_n gerade die Klassenfunktionen ζ^p , $p \vdash n$.

BEWEIS: Nach 5.19 gilt:

$$\Xi^p \equiv \widetilde{\Xi^p} = \sum_{q\vdash n} (\Xi^p\,, \mathrm{Z}^q)\, \mathrm{Z}^q \quad \text{modulo Rad } \mathcal{R} \quad .$$

Mit 5.20, 5.21, 6.6 und 6.13 folgt für alle $p \vdash n$:

$$\xi^p = \sum_{q\vdash n} k_{pq}\, \zeta^q \quad .$$

Nach 6.17 ist die Matrix $(k_{pq})_{p,q\vdash n}$ invertierbar in der Algebra der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbf{Z}$. Die Inverse schreiben wir als $(b_{pq})_{p,q\vdash n}$ mit $b_{pq} \in \mathbf{Z}$. Es folgt für alle $p \vdash n$:

$$\zeta^p = \sum_{q\vdash n} b_{pq}\, \xi^q \quad .$$

Also ist für alle $p \vdash n$ die Klassenfunktion ζ^p ganzzahlige Linearkombination von Charakteren.

Ferner folgt für alle $p, r \vdash n$:

$$\begin{aligned} (\zeta^p\,, \zeta^r) \quad &= \quad \left(\sum_{q\vdash n} b_{pq}\, \xi^q\,, \zeta^r \right) = \sum_{q\vdash n} b_{pq}\; (\xi^q\,, \zeta^r) \\ &= \quad \sum_{q\vdash n} b_{pq}\, k_{qr} = \begin{cases} 1 \text{ falls } p = r \\ 0 \text{ falls } p \neq r \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Es gilt für alle $p \vdash n$:

$$\zeta^p\left(\mathrm{id}_{[n]}\right) = c\left(\mathrm{Z}^p\right)\left(\mathrm{id}_{[n]}\right) = \left(\mathrm{Z}^p\,, \omega_{1^n}\right) = \left(\mathrm{Z}^p\,, \sum_{\pi \in S_n} \pi\right) = |\mathrm{SYT}^p| \in \mathbf{N}_0 \quad .$$

Da die irreduziblen Charaktere von S_n eine Orthonormalbasis von $\mathcal{C}\ell\ S_n$ bilden, folgt nun die Behauptung. $\square$

Rahmencharaktere

6.19 Satz und Definition Für alle Rahmen R ist die Klassenfunktion ζ^R ein Charakter, ein sogenannter *Rahmencharakter*.

Beweis: Sei R ein Rahmen. Wir setzen $n := |R|$.

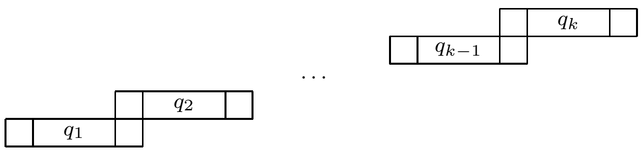
Für alle $p \vdash n$ ist

$$\left(\zeta^R\,, \zeta^p\right) = \left(c\left(\mathrm{Z}^R\right), c\left(\mathrm{Z}^p\right)\right) = \left(\mathrm{Z}^R\,, \mathrm{Z}^p\right) \in \mathbf{N}_0 \quad .$$

Da nach 6.18 die Klassenfunktionen ζ^p , $p \vdash n$, die irreduziblen Charaktere sind, folgt, daß ζ^R ein Charakter ist. $\square$

Der Satz von Murnaghan–Nakayama

6.20 Definition Ein Rahmen R heißt *Randhaken* zu $q \in \mathbf{N}^*$, wenn R wie folgt aussieht:



Für einen solchen Rahmen setzen wir $\delta^q := \mathrm{Z}^R$ und nennen die Zahl $b(R) := |q| - 1$ *Beinlänge* von R .

6.21 Bemerkung Ein Rahmen R ist genau dann ein Randhaken, wenn er zusammenhängend ist bzgl. $\leq_R$, und jedes Ideal von R bzgl. $\rightarrow_R$ eine bzgl. $\leq_R$ konvexe Teilmenge von R ist.

6.22 Bemerkung Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ gilt:

$$\Xi^q = \sum_{q \models r} \delta^r \quad .$$

Durch Möbius-Inversion in der durch die Relation $\models$, wie auf Seite 6 beschrieben, halbgeordneten Menge $\mathbf{N}^*$ erhält man:

$$\delta^q = \sum_{q \models r} (-1)^{|q|-|r|}\, \Xi^r \quad .$$

Als Spezialfall von 6.19 erhalten wir:

6.23 Bemerkung und Definition Für alle $q \in \mathbf{N}^*$ ist die Klassenfunktion $c(\delta^q)$ ein Charakter, der sogenannte *Defektcharakter* zu q .[11]

6.24 Satz (Murnaghan–Nakayama)
Für alle Rahmen R und $q \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\zeta^R(C_{qa}) = \sum_{\substack{I \trianglelefteq R \\ |R \backslash I| = a \\ R\backslash I \text{ Randhaken}}} (-1)^{b(R\backslash I)} \, \zeta^I(C_q) \quad .$$

Beweis: Wir zeigen für alle Rahmen S und $n \in \mathbf{N}$:

$$\Big(\mathrm{Z}^S , \omega_n \Big) = \begin{cases} (-1)^{b(S)} & \text{falls } S \text{ Randhaken und } |S| = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

denn dann folgt für alle Rahmen R und $q \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \zeta^R(C_{qa}) &= c(\mathrm{Z}^R)(C_{qa}) \\ &= \Big(\mathrm{Z}^R , \omega_{qa} \Big) \\ &\underset{5.8}{=} \Big(\mathrm{Z}^R , \omega_q \bullet \omega_a \Big) \\ &\underset{2.4}{=} \Big(\mathrm{Z}^R \big\downarrow , \omega_q \otimes \omega_a \Big) \\ &\underset{3.13}{=} \left(\sum_{I \trianglelefteq R} \mathrm{Z}^I \otimes \mathrm{Z}^{R\backslash I} , \omega_q \otimes \omega_a \right) \\ &= \sum_{I \trianglelefteq R} \Big(\mathrm{Z}^I , \omega_q \Big) \Big(\mathrm{Z}^{R\backslash I} , \omega_a \Big) \\ &= \sum_{\substack{I \trianglelefteq R \\ |R \backslash I| = a \\ R\backslash I \text{ Randhaken}}} (-1)^{b(R\backslash I)} \, \zeta^I(C_q) \quad . \end{aligned}$$

Seien also S ein Rahmen und $n \in \mathbf{N}$.

[11] Diese Charaktere wurden von Kerber in [8], Abschnitt 6.4 betrachtet, als Verfeinerung einer Idee von Foulkes, siehe [8], Abschnitt 6.5 , bzw. [4] .

Ist $|S| \neq n$, so ist offensichtlich $\left(\mathrm{Z}^S , \omega_n\right) = 0$.

Ist S bzgl. $\leq_S$ nicht zusammenhängend, so ist nach 3.11

$$\mathrm{Z}^S = \mathrm{Z}^{S_1} \bullet \mathrm{Z}^{S_2}$$

für nichtleere Rahmen S_1 und S_2 , und somit

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Z}^S , \omega_n\right) &= \left(\mathrm{Z}^{S_1} \bullet \mathrm{Z}^{S_2} , \omega_n\right) \\
&\underset{2.4}{=} \left(\mathrm{Z}^{S_1} \otimes \mathrm{Z}^{S_2} , \omega_n\!\downarrow\right) \\
&\underset{5.9}{=} \left(\mathrm{Z}^{S_1} \otimes \mathrm{Z}^{S_2} , \omega_n \otimes \emptyset + \emptyset \otimes \omega_n\right) \\
&= \left(\mathrm{Z}^{S_1} , \omega_n\right) \underbrace{\left(\mathrm{Z}^{S_2} , \emptyset\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\mathrm{Z}^{S_1} , \emptyset\right)}_{=0} \left(\mathrm{Z}^{S_2} , \omega_n\right) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Ist $\left(\mathrm{Z}^S , \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \neq 0$, so ist also S zusammenhängend. Ferner existiert dann ein $\pi \in \mathrm{SYT}^{(n-k)1^k} \cap (\mathrm{SYT}^S)^{-1}$.

Dann ist für alle $j \in [n]$ die Menge $[j]\,\pi^{-1}$ ein Intervall in $[n]$,[12] und es ist $\pi^{-1} = \iota_S\,\alpha$ für eine monotone Bijektion von S auf $[n]$.

Sei I ein Ideal in S bzgl. $\rightarrow_S$. Dann ist $I = [j]\,\iota_S$ für ein $j \in [n]$. Da $I\alpha = [j]\,\iota_S\,\alpha = [j]\,\pi^{-1}$ ein Intervall ist, ist I als Urbild eines Intervalls unter der monotonen Abbildung α konvex bzgl. $\leq_S$.

Also ist nach 6.21 S ein Randhaken und somit $\mathrm{Z}^S = \delta^q$ für ein $q \models n$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Z}^S , \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) &= \left(\delta^q , \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \\
&\underset{6.22}{=} \left(\sum_{q \models r} (-1)^{|q|-|r|}\, \Xi^r , \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \\
&= \sum_{q \models r} (-1)^{|q|-|r|} \left(\Xi^r , \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \\
&\underset{6.14}{=} \sum_{q \models r} (-1)^{|q|-|r|} \left|\mathrm{ST}^{(n-k)1^k}(r)\right|
\end{aligned}$$

[12] Siehe [1] , Fußnote auf Seite 9 .

$$= \sum_{q \models r} (-1)^{|q|-|r|} \binom{|r|-1}{k}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |q|-1=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Möbius-Inversion)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad b(S)=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad .$$

Also gilt für alle Rahmen S und $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Z}^S, \omega_n\right) &= \left(\mathrm{Z}^S, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\mathrm{Z}^S, \mathrm{Z}^{(n-k)1^k}\right) \\ &= \begin{cases} (-1)^{b(S)} & \text{falls } S \text{ Randhaken und } |S| = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad . \end{aligned}$$

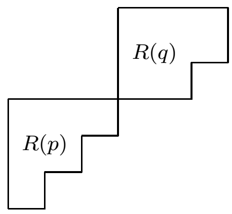
□

Schlußbemerkungen

Zum Nachweis der Anwendbarkeit der hier entwickelten Theorie habe ich den Satz von Murnaghan–Nakayama gewählt. Eine andere Möglichkeit dazu wäre der Satz von *Littlewood–Richardson*. Dieser gibt eine kombinatorische Beschreibung der Zahlen $(\zeta^s\,,\zeta^p \bullet \zeta^q)$ für alle Partitionen p, q, s . Eine solche Beschreibung bekommen wir hier geschenkt, nämlich:

$$(\zeta^s\,,\zeta^p \bullet \zeta^q) = (\mathrm{Z}^s\,,\mathrm{Z}^p \bullet \mathrm{Z}^q) = \left|(\mathrm{SYT}^s)^{-1} \cap \mathrm{SYT}^R\right| \quad ,$$

wobei R ein wie folgt skizzierter Rahmen ist:



In [16] , Appendix A2.1 , läßt sich nachlesen, daß diese Beschreibung äquivalent zur klassischen ist; man muß dabei nur den dort verwendeten Begriff *picture* bzw. das Zählen von *pictures* mittels der Z^R für Rahmen R , und der Bilinearform $(\cdot\,,\cdot)$ auf KS ausdrücken.

Insgesamt glaube ich gezeigt zu haben, daß alle Aussagen der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, die sich allein unter Verwendung der Begriffe irreduzibler Charakter, Skalarprodukt und Induktion bzw. Restriktion bzgl. Young-Untergruppen formulieren lassen, mittels der hier vorgestellten nichtkommutativen Methoden nun wesentlich leichter als bisher zu beweisen sind. Dies gilt auch für darüber hinaus gehende Resultate, wie die noch unveröffentlichte Arbeit [6] zeigt, die aufbauend auf der vorliegenden Arbeit einen einfachen Zugang zum Satz von *Kraskiewicz–Weyman* liefert.

Für das eigentliche Ziel dieser Arbeit, die Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen zu beschreiben, wird von den hier vorgestellten nichtkommutativen Bialgebren eigentlich nur die Rahmenalgebra gebraucht. Bei etwas anderer Organisation wäre es ein leichtes, Produkt, Coprodukt und Bilinearform direkt für die Elemente Z^R , R Rahmen, zu definieren. Allerdings ergibt sich die Definition der Bilinearform am natürlichsten für Permutationen. Möchte man dann Produkt und Coprodukt ebenfalls für Permutationen definieren, so ergibt sich die hier gegebene Definition, die sich kanonisch auf volle Worte ausdehnen läßt. Eine eingehende Untersuchung der hier vorgestellten Bialgebra der vollen Worte steht meines Wissens noch aus; z.B. ist zu vermuten, daß sie als assoziative Algebra frei ist.

Der eigentliche Anstoß für die Entstehung der vorliegenden Arbeit war die von Blessenohl und Laue gehegte Hoffnung, Solomons Algebra mittels des von ihm angegebenen Epimorphismus für die Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen nutzbar zu machen. Diese Hoffnung klingt an in einer Passage aus [1], die mit dem folgenden Satz beginnt:

There is a strong connection between Solomons algebra and the character theory of S_n .

Als schwierigstes Problem dabei stellte sich heraus, *geeignete* Urbilder der irreduziblen Charaktere zu finden. Ein erster Durchbruch gelang mir mit dem Erkennen der Elemente $\delta^{1^k(n-k)}$ von Solomons Algebra als Urbilder gewisser irreduzibler Charaktere, der sogenannten *Hakencharaktere*. Nach vergeblichen Versuchen dies auf alle irreduziblen Charaktere auszudehnen, suchte und fand ich deren Urbilder außerhalb von Solomons Algebra als Summen von Permutationen in KS . Letzteres ist eine Ausprägung der von Blessenohl und Laue propagierten Idee, gewisse eher kombinatorische Probleme der Algebra im Gruppenring der symmetrischen Gruppe auszurechnen, siehe [1] , Seite 1 :

The underlying idea of our approach is to transfer problems on free Lie algebras into the area of group rings of symmetric groups. ...

Als die grundlegenden Ideen dieser Arbeit, Definition der Z^R , R Rahmen, und ihr Verhalten bzgl. des Produkts $\bullet$ und des Coprodukts $\downarrow$, erst einmal formuliert waren, fühlte ich mich unweigerlich an den lesenswerten Artikel [11] erinnert. Zur Rolle des Begriffs Coalgebra in der Kombinatorik empfehle ich den Aufsatz [7] . Natürlich darf der Hinweis auf ein Lehrbuch zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen nicht fehlen; als eines der wenigen Beispiele möchte ich hier nur [5] nennen.

Um den kombinatorischen Gehalt der in der vorliegenden Arbeit an zentraler Stelle verwendeten Bijektion von Robinson–Schensted zu betonen, zitiere ich hier Knuth ([9] , Seite 60) :

The unusual nature of these coincidences might lead us to the suspect that some sort of witchcraft is operating behind the scenes.

Zum Schluß möchte ich meiner Hoffnung Ausdruck geben, daß sich ähnlich wie hier für die symmetrischen Gruppen auch für andere Serien von endlichen Gruppen aus einem kombinatorischen Kern, hier die Bijektion von Robinson–Schensted, durch bloßes Rechnen in ihren Gruppenringen ihre Charaktertheorie entwickeln läßt. Zumindest für Coxeter-Gruppen sollte dies möglich sein.

Zu bedanken habe ich mich bei vielen Personen. Seien es meine Eltern, die mir ein Studium der Mathematik erst ermöglicht haben, oder sei es meine Frau, die mich in mancher Schaffenskrise ohne Murren ertragen hat. Bedanken möchte ich mich bei den Teilnehmern am hiesigen Oberseminar *Algebrentheorie*, insbesondere bei Thorsten Bauer und Manfred Schocker: bei ersterem für viele Diskussionen über Solomons Defektalgebra, an deren algebraischer Struktur er derzeit arbeitet, bei letzterem in erster Linie für Diskussionen des Algorithmus von Robinson–Schensted und einiger Eigenschaften desselben. Bedanken möchte ich mich bei Hartmut Laue und Dieter Blessenohl dafür, daß sie mich und andere an die algebraische Kombinatorik herangeführt haben.

Ihnen, Herr Blessenohl, danke ich für die stets motivierende Betreuung meiner Dissertation.

Literatur

[1] D. Blessenohl and H. Laue. Algebraic combinatorics related to the free lie algebra. In *Publ. I.R.M.A Strasbourg*, Actes 29^{e} Séminaire Lotharingien, pages 1–21, 1993.

[2] D. Blessenohl and H. Laue. On the descending Loewy series of Solomon's descent algebra. *Journal of Algebra*, 180:698–724, 1996.

[3] E. B. Dynkin. Calculation of the coeficients of the Campbell–Hausdorff formula. *Docl. Akad. Nauk SSSR (N. S.)*, 57:323–326, 1947.

[4] H. O. Foulkes. Eulerian numbers, Newcomb's problem and representations of symmetric groups. *Discrete Mathematics*, 30:3–49, 1980.

[5] G. James and A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group.* Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

[6] A. Jöllenbeck and M. Schocker. A noncommutative approach to the Kraskiewicz–Weyman theorem. In preparation.

[7] S. A. Joni and G.-C. Rota. Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics. *Contemporary Mathematics*, 6:1–47, 1982.

[8] A. Kerber. *Algebraic combinatorics via finite group actions.* Mannheim, 1991.

[9] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Sorting and Searching.* Addison-Wesley, 1973.

[10] C. Malvenuto and C. Reutenauer. Duality between quasi-symmetric functions and the solomon descent algebra. *Journal of Algebra*, 177:967–982, 1995.

[11] G. Polya. On picture writing. *American Mathematical Monthly*, 63:689–697, 1956.

[12] L. Solomon. A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group. *Journal of Algebra*, 41:255–268, 1976.

[13] W. Specht. Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. *Mathematische Zeitschrift*, 51:367–376, 1948.

[14] R. P. Stanley. Ordered structures and partitions. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 119, 1972.

[15] F. Wever. Über Invarianten in Lieschen Ringen. *Mathematische Annalen*, 120:563–580, 1949.

[16] A. V. Zelewinsky. *Representations of Finite Classical Groups, A Hopf Algebra Approach*, volume 869 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1981.