Mathematisches Seminar der
Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

Abgeleitete Algebren

Diplomarbeit von Armin Jöllenbeck
Kiel 1994
Betreuer: Prof. Dr. Dieter Blessenohl

für Jutta

Vorwort

Die in dieser Arbeit betrachteten Objekte sind die K-Algebren $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$, wobei $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren, A eine Menge und $k = (k_1, k_2) \in K^2$ sind. Dabei ist eine Varietät, kurz gesagt, eine Klasse von Algebren, in denen gewisse vorgegebene Identitäten, z.B. das Assoziativgesetz, gelten. Die Algebren $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ erhält man folgendermaßen: Zunächst ist $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ die über der Menge A in der Varietät $\mathcal{V}$ freie K-Algebra. Dann ist $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ die von A erzeugte Teilalgebra der Algebra $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$, die aus dem K-Modul $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ mit der Verknüpfung $\circ_k$, definiert durch $x \circ_k y = k_1 xy + k_2 yx$, gebildet ist.

Dazu wird in Kapitel 1 der Begriff *Varietät von K-Algebren* und, was unter der über einer Menge in einer Varietät *freien Algebra* zu verstehen ist, geklärt. Anschließend wird in Kapitel 2 der Begriff *abgeleitete Algebra* eingeführt und insbesondere die Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$ und $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ definiert. Dabei ist die für das weitere wichtigste Einsicht, daß es eine Varietät $\mathcal{V}^{(k)}$ gibt, in der $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ frei über A ist. Die Kapitel 3 und 4 handeln von dem wohl prominentesten Beispiel zum Begriff *abgeleitete Algebra*. In Kapitel 3 wird genauer als im Kapitel 1 die freie assoziative Algebra betrachtet. Dann wird in Kapitel 4 unter anderem das klassische Resultat von Witt gezeigt, daß die von der freien assoziativen Algebra abgeleite Lie-Algebra gerade die freie Lie-Algebra ist. Die in Kapitel 5 angegebene Charakterisierung der von der freien assoziativen Algebra abgeleiteten Algebren, klärt, in welchem Sinne der Begriff *abgeleitete Algebra* natürlich ist.

Nach diesen Vorbereitungen werden drei Probleme für von freien Algebren abgeleitete Algebren bearbeitet. Am wichtigsten von den dreien, und zentral in dieser Arbeit, ist das Problem, die Varietät $\mathcal{V}^{(k)}$ zu bestimmen, wenn die Varietät $\mathcal{V}$ gegeben ist. Dabei wird eine Varietät ganz konkret dadurch beschrieben, daß die sie bestimmenden Identitäten angegeben werden. Das zweite Problem ist, bei gegebener Varietät $\mathcal{V}$ zu entscheiden, wann für $k, l \in K^2$ die Algebren $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ und $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ isomorph sind. Das dritte Problem besteht darin, die „Größe“ der Algebren $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ zu beschreiben.

Im Kapitel 6 wird ein nützliches Monoid vorgestellt, das diese Probleme weitgehend beherrscht. In den verbleibenden Kapiteln werden die daraus resultierenden Lösungen vorgestellt.

Dank gebührt meinen Eltern, meiner Familie und Herrn Blessenohl.

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Generalvoraussetzung

Für die gesamte Arbeit setzen wir voraus:

Sei K ein kommutativer Ring mit Eins. Wähle fest eine abzählbar unendliche Menge X.

Den Ring K brauchen wir, da wir *K-Algebren* betrachten werden.
Wir werden im folgenden auch Ergebnisse nur für speziellere Grundringe betrachten. Dazu werden wir in einzelnen Abschnitten z.B. voraussetzen, daß K ein Körper ist.

Die Menge X werden wir zur Definition und zum Gebrauch des Begriffs der *Varietät von K-Algebren* verwenden.

Zur Erinnerung

0.1.Definition. *Seien R ein K-Modul und $\circ$ eine K-bilineare Verknüpfung auf R. Dann heißt das Paar $(R, \circ)$ eine* K-Algebra *oder kurz eine* Algebra.

Eine Algebra $(R, \circ)$ heißt assoziativ*, falls gilt:*
$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *für alle $x, y, z \in R$.*

Eine Algebra $(R, \circ)$ heißt kommutativ*, falls gilt:*
$x \circ y = y \circ x$ *für alle $x, y \in R$.*

Eine Algebra $(R, \circ)$ heißt antikommutativ*, falls gilt:*
$x \circ x = 0$ *für alle $x \in R$.*

Eine antikommutative Algebra $(R, \circ)$ heißt Lie-Algebra*, falls in R die sogenannte* Jacobi-Identität *gilt:*
$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0$ *für alle $x, y, z \in R$.*

Eine kommutative Algebra $(R, \circ)$ heißt Jordan-Algebra*, falls gilt:*
$((x \circ x) \circ y) \circ x = (x \circ x) \circ (y \circ x)$ *für alle $x, y \in R$.*

Falls klar ist, welche Multiplikation $\circ$ auf R gemeint ist, schreiben wir kurz R für $(R, \circ)$ und auch xy statt $x \circ y$.

0.2.Beispiele. *Die Menge* $\mathrm{End}_K\, V$ *aller Endomorphismen eines K-Moduls V ist mit bildweise definierter Addition und Skalarmultiplikation und der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Multiplikation eine assoziative K-Algebra.*
Ist R eine assoziative K-Algebra, so ist R mit der durch $[xy] := xy - yx$ definierten Multiplikation eine Lie-Algebra, die sogenannte von R abgeleitete Lie-Algebra.
Ferner ist R mit der durch $x \circ y := xy + yx$ definierten Multiplikation eine Jordan-Algebra, die sogenannte von R abgeleitete Jordan-Algebra.

Ein weiteres Beispiel für eine assoziative K-Algebra ist der Gruppenring KG einer Gruppe G.

0.3.Definition. *Sei R eine K-Algebra.*
Ein K-Teilmodul I von R heißt Ideal *von R, wenn gilt: $RI \subseteq I$ und $IR \subseteq I$.*
Ein Ideal I von R heißt verbal, *wenn gilt: $I\varphi \subseteq I$ für alle $\varphi \in \operatorname{End} R$.*

0.4.Definition. *Sei R eine K-Algebra. Eine Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von K-Teilmoduln von R heißt* Gradierung *von R, wenn gilt:*
$R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt R_n die n-te homogene Komponente *von R bzgl. der Gradierung $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

0.5.Definition. *Sei M eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung auf M. Dann heißt das Paar $(M, \circ)$ ein* Magma. *Falls klar ist, welche Verknüpfung $\circ$ auf M gemeint ist, schreiben wir kurz M statt $(M, \circ)$ und auch xy statt $x \circ y$.*

0.6.Bezeichnungen.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $\underline{n}\rfloor := \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq n\}$ und $\underline{n}\rfloor_0 := \{0\} \cup \underline{n}\rfloor$.

1 Grundbegriffe der universellen Algebra

Die freie Algebra und das freie Magma

1.1.Definition. *Eine K-Algebra $\mathcal{F}$ heißt* frei über A, *wenn $A \subseteq \mathcal{F}$ ist, und für alle K-Algebren R und für alle Abbildungen $\varphi : A \to R$ genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{F} \to R$ existiert so, daß $\bar{\varphi}|_A = \varphi$ gilt, d.h. , daß das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & R \\ A \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

1.2.Bemerkung. *Sei A eine Menge und sei $\mathcal{F}$ eine über A freie K-Algebra. Dann wird $\mathcal{F}$ als K-Algebra von A erzeugt.*
Sei $\mathcal{G}$ eine weitere über A freie K-Algebra. Dann ist $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{F}$.
Genauer gibt es einen Isomorphismus φ von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$ so, daß $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$ ist, d.h. , daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathcal{G} \\ & A \arrow[ul, "\mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_A"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: Bezeichne mit $\langle A\rangle$ die von A erzeugte K-Teilalgebra von $\mathcal{F}$. Zu zeigen ist $\mathcal{F} \subseteq \langle A\rangle$. Da $\mathcal{F}$ frei über A ist, und id_A eine Abbildung von A nach $\langle A\rangle$ ist, existiert ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \langle A\rangle$ mit $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$. Da $\langle A\rangle \subseteq \mathcal{F}$ ist, ist φ auch eine Abbildung nach $\mathcal{F}$. Dann sind die Abbildungen φ und $\mathrm{id}_\mathcal{F}$ Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$ mit $\varphi|_A = \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_\mathcal{F}|_A$. Da $\mathcal{F}$ frei über A ist, folgt daraus $\varphi = \mathrm{id}_\mathcal{F}$. Also gilt $\mathcal{F} = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_\mathcal{F}) = \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \langle A\rangle$.

Da $\mathcal{F}$ frei über A ist, gibt es einen Homomorhismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$. Da $\mathcal{G}$ frei über A ist, gibt es einen Homomorhismus $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ mit $\psi|_A = \mathrm{id}_A$. Dann sind $\varphi\psi$ und $\mathrm{id}_\mathcal{F}$ Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$ mit $(\varphi\psi)|_A = \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_\mathcal{F}|_A$. Da $\mathcal{F}$ frei über A ist, gilt dann $\varphi\psi = \mathrm{id}_\mathcal{F}$. Ebenso folgt $\psi\varphi = \mathrm{id}_\mathcal{G}$. Dann ist insbesondere φ ein Isomorphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$. □

1.3.Definition. *Sei A eine Menge. Ein Magma $\mathcal{M}$ heißt* frei über A, *wenn $A \subseteq \mathcal{M}$ ist, und für alle Magmen M und für alle Abbildungen $\varphi : A \to M$ genau ein Homomorphismus $\bar\varphi : \mathcal{M} \to M$ existiert mit $\bar\varphi|_A = \varphi$.*

1.4.Bemerkung. *Sei A eine Menge und sei $\mathcal{M}$ ein über A freies Magma. Dann wird $\mathcal{M}$ als Magma von A erzeugt.*
Sei $\mathcal{N}$ ein weiteres über A freies Magma. Dann ist $\mathcal{N}$ isomorph zu $\mathcal{M}$.
Genauer gibt es einen Isomorphismus φ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{N}$ so, daß $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$ ist.

1.5.Definition und Bemerkung. *Sei A eine Menge. Sei $\mathcal{M}$ ein über A freies Magma. Die Menge der natürlichen Zahlen $I\!N$ ist zusammen mit der Addition ein Magma. Also existiert genau ein Homomorphimus $l : \mathcal{M} \to I\!N$ mit $l(a) = 1$ für alle $a \in A$.*
Für alle $w \in \mathcal{M}$ heißt $|w| := l(w)$ die Länge *von w.*
Dann gilt gerade: $|a| = 1$ für alle $a \in A$ und $|xy| = |x|\,|y|$ für alle $x, y \in \mathcal{M}$.
Für alle $n \in I\!N$ setze $\mathcal{M}_n := \{w \in \mathcal{M} \mid |w| = n\}$.
Dann gilt: $\mathcal{M} = \bigcup_{n\in I\!N} \mathcal{M}_n$, und diese Vereinigung ist disjunkt.

Die beiden folgenden Sätze klären den Zusammenhang zwischen dem Begriff des *freien Magmas* und dem Begriff der *freien K-Algebra.*

1.6.Satz. *Sei A eine Menge. Sei $\mathcal{M}$ ein über A freies Magma. Sei $\mathcal{F}$ ein K-Modul mit $\mathcal{M}$ als eine K-Basis. Definiere auf $\mathcal{F}$ eine Verknüpfung durch K-bilineare Fortsetzung der Verknüpfung auf $\mathcal{M}$.*
Dann ist $\mathcal{F}$ offensichtlich eine K-Algebra.
Ferner ist die K-Algebra $(\mathcal{F}, \circ)$ frei über A.

Beweis: Seien R eine K-Algebra und $\varphi : A \to R$ eine Abbildung.
Da das Magma $\mathcal{M}$ frei über A ist, und R mit der Algebren-Multiplikation insbesondere ein Magma ist, existiert ein Homomorphismus $\psi : \mathcal{M} \to R$ mit $\psi|_A = \varphi$. Da $\mathcal{M}$ eine K-Basis von $\mathcal{F}$ ist, und R insbesondere ein K-Modul ist, existiert eine K-lineare Abbildung $\bar\varphi : \mathcal{F} \to R$ mit $\bar\varphi|_\mathcal{M} = \psi$. Da $A \subseteq \mathcal{M}$ ist, gilt: $\bar\varphi|_A = (\bar\varphi|_\mathcal{M})|_A = \psi|_A = \varphi$. Nach Wahl ist $\bar\varphi$ K-linear. Die beiden Abbildungen $(x, y) \mapsto (xy)\bar\varphi$ und $(x, y) \mapsto x\bar\varphi\, y\bar\varphi$ von $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ nach R sind K-bilinear. Da $\bar\varphi|_\mathcal{M} = \psi$ ist, und ψ ein Homomorhismus ist, stimmen sie auf der Menge $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ überein. Da $\mathcal{M}$ eine K-Basis von $\mathcal{F}$ ist, sind sie dann gleich. Das heißt aber gerade, daß für alle $x, y \in \mathcal{F}$ gilt: $(xy)\bar\varphi = x\bar\varphi\, y\bar\varphi$. Also ist $\bar\varphi$ ein Homomorphismus.

Da $\mathcal{M}$ nach Bemerkung 1.4 als Magma von A erzeugt wird, und $\mathcal{F}$ als K-Modul von $\mathcal{M}$ erzeugt wird, wird $\mathcal{F}$ als K-Algebra von A erzeugt. Also ist der obige Homomorphismus $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt.
Also ist die K-Algebra $\mathcal{F}$ frei über A. $\square$

1.7.Satz und Definition. *Sei A eine Menge. Sei $\mathcal{F}$ eine über A freie K-Algebra. Dann ist $\mathcal{F}$ mit der Algebren-Multiplikation insbesondere ein Magma. Sei $\mathcal{M}$ das von A erzeugte Teilmagma des Magmas $\mathcal{F}$.*
Dann ist das Magma $\mathcal{M}$ frei über A. Ferner ist $\mathcal{M}$ eine K-Basis von $\mathcal{F}$.
Für alle $n \in I\!N$ setze $\mathcal{F}_n := \langle \mathcal{M}_n \rangle_K$. Dann ist $(\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N}$ eine Gradierung von $\mathcal{F}$.

Beweis: Seien M ein Magma und $\varphi : A \to M$ eine Abbildung.
Wähle einen K-Modul $\mathcal{G}$ mit M als eine K-Basis. Definiere auf $\mathcal{G}$ eine Verknüpfung als K-bilineare Fortsetzung der Verknüpfung auf M. Dann ist $\mathcal{G}$ mit dieser Verknüpfung eine K-Algebra. Da $\mathcal{F}$ frei über A ist, existiert dann ein Homomorphismus $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\psi|_A = \varphi$. Setze $\bar{\varphi} := \psi|_{\mathcal{M}}$. Dann ist auch $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus und es gilt: $\bar{\varphi}|_A = \varphi$.
Nach Voraussetzung wird $\mathcal{M}$ als Magma von A erzeugt. Wegen $A\bar{\varphi} \subseteq M$ folgt daraus, daß $\mathcal{M}\bar{\varphi} \subseteq M$. Somit ist $\bar{\varphi} : \mathcal{M} \to M$.
Ferner folgt, daß der Homomorphismus $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist.
Also ist das Magma $\mathcal{M}$ frei über A.

Nach Satz 1.6 existiert dann eine über A freie K-Algebra $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{M}$ als eine K-Basis. Nach Bemerkung 1.2 existiert ein Isomorphismus θ von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$ mit $\theta|_A = \mathrm{id}_A$. Da $\mathcal{M}$ als Magma von A erzeugt wird, folgt daraus $\theta|_{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$. Da θ ein Isomorphismus ist, ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}\theta^{-1}$ eine K-Basis auch von $\mathcal{F}$.

Der Rest folgt sofort mit Bemerkung 1.5 . $\square$

1.8.Satz und Definition. *Sei A eine Menge. Dann existiert bis auf Isomorphie genau ein über A freies Magma $\mathcal{M}$. Wir wählen ein solches, nennen es* das über A freie Magma *und bezeichnen es mit $\mathcal{M}(A)$.*

Beweis: Wähle eine Menge p, so daß für alle Mengen q gilt $(p, q) \notin A$.
Definiere für alle $n \in I\!N$ rekursiv $\mathcal{M}_n$ durch:
$\mathcal{M}_1 := A$ und $\mathcal{M}_n := \{p\} \times \bigcup_{k=1}^{n-1} (\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_{n-k})$ für $n \geq 2$.
Setze $\mathcal{M} := \bigcup_{n \in I\!N} \mathcal{M}_n$.
Definiere eine Verknüpfung auf $\mathcal{M}$ durch: $xy := (p, (x, y))$ für alle $x, y \in \mathcal{M}$.
Damit ist $\mathcal{M}$ ein Magma mit $A \subseteq \mathcal{M}$.

Sei M ein Magma und sei $\varphi : A \to M$ eine Abbildung.

Nach Definition des Magmas $\mathcal{M}$ ist klar, daß $\mathcal{M}$ von A erzeugt wird, und zwar so, daß gilt:

> Für alle $n \in I\!N_{n \geq 2}$ und für alle $z \in \mathcal{M}_n$ existieren eindeutig bestimmte $k \in \underline{n-1}|$, $x \in \mathcal{M}_k$, $y \in \mathcal{M}_{n-k}$ mit $z = xy$.

Folglich lassen sich wie folgt für alle $n \in I\!N$ rekursiv Abbildungen $\varphi_n : \mathcal{M}_n \to M$ definieren. Setze $\varphi_1 := \varphi$. Sei $n \in I\!N_{n \geq 2}$ und φ_k bereits definiert für alle $k \in \underline{n-1}|$. Definiere φ_n durch: $(xy)\varphi_n := x\varphi_k \, y\varphi_{n-k}$ mit $k \in \underline{n-1}|$, $x \in \mathcal{M}_k$, $y \in \mathcal{M}_{n-k}$.

Eine leichte Induktion zeigt, daß die $\mathcal{M}_n$ paarweise disjunkt sind; dabei liefert die vorausgesetzte Forderung an p gerade den Induktionsanfang. Folglich läßt sich eine Abbildung $\bar{\varphi} : \mathcal{M} \to M$ definieren durch: $z\bar{\varphi} := z\varphi_n$ für $z \in \mathcal{M}_n$.

Nach Definition ist klar, daß $\bar{\varphi}|_A = \varphi$ gilt, und eine leichte Induktion zeigt, daß $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus ist.

Da das Magma $\mathcal{M}$ von A erzeugt wird, ist $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt.

Somit ist die Existenz eines über A freien Magmas $\mathcal{M}$ gezeigt. Es ist nach Bemerkung 1.4 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. □

1.9.Satz und Definition. *Sei A eine Menge. Dann existiert bis auf Isomorphie genau eine über A freie K-Algebra $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{M}(A)$ als K-Basis. Wir wählen eine solche, nennen sie* die über A freie K-Algebra *und bezeichnen sie mit $\mathcal{F}_K(A)$.*

Beweis: Mit $\mathcal{M}(A)$ haben wir nun ein über A freies Magma. Nach Satz 1.6 existiert dann eine über A freie K-Algebra mit $\mathcal{M}(A)$ als K-Basis, die nach Bemerkung 1.2 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. □

Varietäten von Algebren

1.10.Lemma. *Seien R,S K-Algebren, π ein Epimorphismus von R auf S und $\psi : \mathcal{F}_K(X) \to R$ ein Homomorphismus.*
Dann existiert ein Homomorphismus $\psi' : \mathcal{F}_K(X) \to R$ so, daß $\psi = \psi'\pi$ gilt, d.h. , daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_K(X) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & & S \\
& R \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Da π surjektiv auf S ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $r_x \in R$ mit $r_x\pi = x\psi$.[1] Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, gibt es einen Homomorphismus $\psi' : \mathcal{F}_K(X) \to R$ mit $x\psi' = r_x$ für alle $x \in X$. Dann gilt für alle $x \in X$: $x\psi'\pi = r_x\pi = x\psi$. Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, folgt daraus $\psi'\pi = \psi$. □

Nun kommen wir zum eigentlichen Begriff dieses Kapitels, dem der *Varietät von K-Algebren.*

1.11.Definition. *Sei R eine K-Algebra und sei $f \in \mathcal{F}_K(X)$.*
Wir sagen, daß R die Identität f erfüllt, *wenn für alle Homomorphismen $\varphi : \mathcal{F}_K(X) \to R$ gilt $f\varphi = 0$.*
Für alle $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ sei $\mathcal{V}(I)$ die Klasse derjenigen K-Algebren, die alle Identitäten $f \in I$ erfüllen.

[1]Das Auswahlaxiom wird hier nicht benötigt, da die Menge X zwar unendlich aber abzählbar ist.

Eine Klasse $\mathcal{V}$ von K-Algebren heißt Varietät von K-Algebren*, wenn es ein $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ gibt mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$.*

1.12.Beispiele. *a) Die Klasse $\mathcal{V}(\emptyset)$ ist gerade die Klasse aller K-Algebren.*

b) Wähle paarweise verschiedene $x_1, x_2, x_3 \in X$.
Dann ist $\mathcal{V}(\{(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)\})$ die Klasse der assoziativen K-Algebren, denn für alle K-Algebren R gilt:

$$\begin{aligned}
&R \textit{ erfüllt } (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) \iff \\
&\quad\iff \quad ((x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3))\varphi = 0 \textit{ für alle Homomorphismen } \varphi : \mathcal{F}_K(X) \to R \\
&\quad\iff \quad (x_1\psi\, x_2\psi)\, x_3\psi = x_1\psi\, (x_2\psi\, x_3\psi) \textit{ für alle Abbildungen } \psi : X \to R \\
&\quad\iff \quad (xy)z = x(yz) \quad \textit{für alle } x, y, z \in R \quad .
\end{aligned}$$

1.13.Definition. *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von K-Algebren.*
Setze $\mathcal{I}(\mathcal{C}) := \{f \in \mathcal{F}_K(X) \,|\, R \text{ erfüllt } f \text{ für alle } R \in \mathcal{C}\}$.
Für alle K-Algebren R schreiben wir auch $\mathcal{I}(R)$ statt $\mathcal{I}(\{R\})$.

1.14.Bemerkung. *Seien $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ und $\mathcal{I}$ das von I erzeugte verbale Ideal.*
Dann gilt $\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \mathcal{V}(I)$.

Beweis: „ $\subseteq$ “ : Sei $R \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$. Dann erfüllt R alle Identitäten aus $\mathcal{I}$. Da $I \subseteq \mathcal{I}$ ist, erfüllt R insbesondere alle Identitäten aus I. Also ist $R \in \mathcal{V}(I)$.

„ $\supseteq$ “ : Sei $R \in \mathcal{V}(I)$. Dann gilt $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V})$.
Nach Definition ist $\mathcal{I}(\mathcal{V}) = \bigcap\{\mathrm{Kern}(\varphi) \,|\, \varphi : \mathcal{F}_K(X) \to R \text{ Homomorphismus}\}$, also ist $\mathcal{I}(\mathcal{V})$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.
Da $\mathcal{I}$ als verbales Ideal von I erzeugt wird, folgt nun $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V})$, d.h. gerade, daß alle Identitäten aus $\mathcal{I}$ von R erfüllt werden, also ist $R \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$. □

1.15.Bemerkung. *Seien $I, J \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $I \subseteq J$.*
Dann gilt $\mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(J)$.

Beweis: Sei $R \in \mathcal{V}(J)$. Dann erfüllt R alle Identitäten aus J. Wegen $I \subseteq J$ erfüllt R auch alle Identitäten aus I. Also ist $R \in \mathcal{V}(I)$. □

1.16.Bemerkung. *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.*
Seien $R \in \mathcal{V}$, T eine Teilalgebra von R und φ ein Epimorphismus von R auf eine weitere K-Algebra S.
Dann sind auch $T, S \in \mathcal{V}$.[2]

Beweis: Es ist trivial, daß $R \in \mathcal{V}$ ist. Mit 1.10 läßt sich $S \in \mathcal{V}$ zeigen. □

[2]Ferner ist $\mathcal{V}$ abgeschlossen unter der Bildung von direkten Produkten. Ist umgekehrt eine Klasse $\mathcal{V}$ von K-Algebren abgeschlossen unter der Bildung von Teilalgebren, homomorphen Bildern und direkten Produkten, so ist $\mathcal{V}$ eine Varietät. Diese Charakterisierung ist gerade der klassische Satz von Birkhoff.

Die in einer Varietät von Algebren freie Algebra

1.17.Definition. *Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.*
Ein Paar $(\mathcal{F}, \iota)$ heißt frei über A in $\mathcal{V}$, *wenn $\mathcal{F} \in \mathcal{V}$ ist, $\iota : A \to \mathcal{F}$ eine Abbildung ist, und für alle $R \in \mathcal{V}$ und für alle Abbildungen $\varphi : A \to R$ genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{F} \to R$ existiert so, daß $\iota\bar{\varphi} = \varphi$ gilt, d.h. , daß das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & R \\ A \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

1.18.Definition. *Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.*
Sei $(\mathcal{F}, \iota)$ ein über A in $\mathcal{V}$ freies Paar.
Die K-Algebra $\mathcal{F}$ ist mit der Algebren-Multiplikation insbesondere ein Magma. Dann heißen die Elemente des von $A\iota$ erzeugten Teilmagmas von $\mathcal{F}$ Monome *in $\mathcal{F}$.*

1.19.Definition. *Seien A eine Menge, $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ K-Algebren und $\iota : A \to \mathcal{F}$, $\iota' : A \to \mathcal{G}$ Abbildungen. Dann heißen die Paare $(\mathcal{F}, \iota)$ und $(\mathcal{G}, \iota')$* isomorph *zueinander, wenn es einen Isomorphismus φ von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$ gibt so, daß $\iota\varphi = \iota'$ gilt, d.h. , daß das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathcal{G} \\ & A \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota'"'] & \end{tikzcd}$$

1.20.Bemerkung. *Seien A eine Menge, $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren und $(\mathcal{F}, \iota)$ ein über A in $\mathcal{V}$ freies Paar. Dann wird $\mathcal{F}$ als K-Algebra von $A\iota$ erzeugt.*
Sei $(\mathcal{G}, \iota')$ ein weiteres über A in $\mathcal{V}$ freies Paar. Dann ist $(\mathcal{G}, \iota')$ isomorph zu $(\mathcal{F}, \iota)$.[3]

Beweis: Da $\langle A\iota \rangle$ eine K-Teilalgebra von $\mathcal{F}$ ist, ist nach 1.16 auch $\langle A\iota \rangle \in \mathcal{V}$.
Zu zeigen ist $\mathcal{F} \subseteq \langle A\iota \rangle$. Da $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, $\langle A\iota \rangle \in \mathcal{V}$ ist, und ι eine Abbildung von A nach $\langle A\iota \rangle$ ist, existiert ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \langle A\iota \rangle$ mit $\iota\varphi = \iota$. Da $\langle A\iota \rangle \subseteq \mathcal{F}$ ist, ist φ auch eine Abbildung nach $\mathcal{F}$. Dann sind die Abbildungen φ und $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$ mit $\iota\varphi = \iota = \iota\,\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Da $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, folgt daraus $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Also gilt $\mathcal{F} = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \langle A\iota \rangle$.

Da $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$ ist, und ι' eine Abbildung von A nach $\mathcal{G}$ ist, gibt es einen Homomorhismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\iota\varphi = \iota'$. Da $(\mathcal{G}, \iota')$ frei über A in $\mathcal{G}$ ist, $\mathcal{F} \in \mathcal{V}$ ist, und

[3]Vergleiche dies mit Bemerkung 1.2.

ι eine Abbildung von A nach $\mathcal{F}$ ist, gibt es einen Homomorhismus $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ mit $\iota'\psi = \iota$. Dann sind $\varphi\psi$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$ mit $\iota\varphi\psi = \iota'\psi = \iota = \iota\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Da $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, gilt dann $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Ebenso folgt $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Dann ist insbesondere φ ein Isomorphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$. □

1.21.Satz. *Seien A eine Menge und $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$. Sei $\mathcal{I}$ das von der Menge $I' := \{f\pi \mid f \in I, \pi : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}_K(A)$ Homomorphismus$\}$ erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(A)$. Sei ν der natürliche Epimorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ auf $\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}$. Dann ist $(\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}, \nu|_A)$ frei über A in $\mathcal{V}(I)$.*[4]

Beweis: Sei $f \in I$ und sei $\psi : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}$ ein Homomorphismus.
Nach Lemma 1.10 existiert ein Homomorhismus $\psi' : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}_K(A)$ mit $\psi = \psi'\nu$.
Dann ist $f\psi' \in I' \subseteq \mathcal{I} = \mathrm{Kern}(\nu)$, also ist $f\psi = f\psi'\nu = 0$.
Also erfüllt $\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}$ alle Identitäten $f \in I$, und somit ist $\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I} \in \mathcal{V}$.

Sei $R \in \mathcal{V}$, und sei $\varphi : A \to R$ eine Abbildung.
Da $\mathcal{F}_K(A)$ frei über A ist existiert ein Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_K(A) \to R$ mit $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$.

Sei $f \in I$ und sei $\pi : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}_K(A)$ ein Homomorphismus. Dann ist $\pi\tilde{\varphi}$ ein Homomorhismus von $\mathcal{F}_K(X)$ nach R. Da $R \in \mathcal{V}$ ist, folgt nun $f\pi\tilde{\varphi} = 0$.
Damit ist gezeigt: $I' \subseteq \mathrm{Kern}(\tilde{\varphi})$.
Ferner ist $\mathrm{Kern}(\tilde{\varphi})$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(A)$.
Da $\mathcal{I}$ als verbales Ideal von I' erzeugt wird, folgt $\mathrm{Kern}(\nu) = \mathcal{I} \subseteq \mathrm{Kern}(\tilde{\varphi})$.

Somit läßt sich durch $f\nu \mapsto f\tilde{\varphi}$ für alle $f \in \mathcal{F}_K(A)$ eine Abbildung $\bar{\varphi} : \mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I} \to R$ definieren. Offensichtlich ist $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus, und es gilt $\nu\bar{\varphi} = \tilde{\varphi}$.
Es folgt $\nu|_A\bar{\varphi} = (\nu\bar{\varphi})|_A = \tilde{\varphi}|_A = \varphi$.

Sei $\psi : \mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I} \to R$ ein weiterer Homomorphismus mit $\nu|_A\psi = \varphi$.
Es gilt $(\nu\psi)|_A = \nu|_A\psi = \nu|_A\psi = \varphi$ und $(\nu\bar{\varphi})|_A = \varphi$. Da $\mathcal{F}_K(A)$ frei über A ist, folgt $\nu\psi = \nu\bar{\varphi}$. Da ν surjektiv auf $\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}$ ist, folgt daraus $\psi = \bar{\varphi}$.
Damit ist $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt.

Also ist $(\mathcal{F}_K(A)/\mathcal{I}, \nu|_A)$ frei über A in $\mathcal{V}$. □

1.22.Satz und Definition. *Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren. Dann existiert bis auf Isomorphie genau ein über A in $\mathcal{V}$ freies Paar $(\mathcal{F}, \iota)$. Wir wählen ein solches Paar $(\mathcal{F}, \iota)$. Dann nennen wir $\mathcal{F}$* die über A in $\mathcal{V}$ freie Algebra *und bezeichnen $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$. Ferner bezeichnen wir ι mit $\iota_{\mathcal{V},A}$. Falls klar ist, welches $\iota_{\mathcal{V},A}$ gemeint ist, schreiben wir $\bar{a}$ statt $a\iota_{\mathcal{V},A}$ für alle $a \in A$.*

Beweis: Nach Satz 1.21 existiert ein über A in $\mathcal{V}$ freies Paar. Es ist nach Bemerkung 1.20 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. □

1.23.Satz. *Seien $I, J \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J)$.*
Sei $\mathcal{I}$ das von I erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$, und sei $\mathcal{J}$ das von J erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.
Dann gilt $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

[4] Die Tatsache, daß $\nu|_A$ nicht unbedingt injektiv sein muß, ist der Grund für die Verfeinerung von Definition 1.1 zu Definition 1.17 .

Beweis: Sei $f \in \mathcal{I}$. Sei ν der natürliche Epimorphismus von $\mathcal{F}_K(X)$ auf $\mathcal{F}_K(X)/\mathcal{J}$. Nach Satz 1.21 ist dann $(\mathcal{F}_K(X)/\mathcal{J}, \nu|_X)$ frei über X in $\mathcal{V}(J)$. Nach Bemerkung 1.14 und Voraussetzung gilt $\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \mathcal{V}(J)$. Also ist $\mathcal{F}_K(X)/\mathcal{J} \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$. Also wird f insbesondere von $\mathcal{F}_K(X)/\mathcal{J}$ erfüllt. Da ν ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(X)$ nach $\mathcal{F}_K(X)/\mathcal{J}$ ist, folgt insbesondere $f\nu = 0$, also $f \in \mathcal{J}$.
Damit gilt $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Ebenso folgt $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. □

Die folgende Bemerkung liefert ein wichtiges Kriterium dafür, daß die Abbildung $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv ist.

1.24.Bemerkung. *Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.*
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:
(1) $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv für alle Mengen A.
(2) Es existiert ein $R \in \mathcal{V}$ mit $R \neq \{0_R\}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) : Wähle eine Menge A mit $|A| \geq 2$. Wir zeigen $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \neq \{0\}$.
Wäre $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) = \{0\}$, so gälte $a\iota_{\mathcal{V},A} = 0$ für alle $a \in A$. Dies steht aber wegen $|A| \geq 2$ im Widerspruch dazu, daß $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv ist.
Also ist $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \neq \{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Seien $a, b \in A$ mit $a \neq b$.
Wähle $r \in R \setminus \{0\}$. Definiere eine Abbildung $\varphi : A \to R$ durch $a\varphi = r$ und $c\varphi = 0$ für alle $c \in A \setminus \{a\}$. Dann existiert ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \to R$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi} = \varphi$
Dann gilt $a\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi} = a\varphi = r$ und $b\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi} = b\varphi = 0$.
Wäre $a\iota_{\mathcal{V},A} = b\iota_{\mathcal{V},A}$, so wäre auch $a\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi} = b\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi}$ im Widerspruch zu $r \neq 0$.
Also ist $a\iota_{\mathcal{V},A} \neq b\iota_{\mathcal{V},A}$. □

Falls $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv ist, ist es möglich, und mir erscheint es praktisch, sich vorzustellen, daß A eine Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ ist, und $\iota_{\mathcal{V},A}$ gerade die Identität auf A ist.
Zur Präzisierung dieser Vorstellung dient die folgende Bemerkung.

1.25.Bemerkung. *Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren derart, da0 $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv ist.*
Dann existiert eine K-Algebra $\mathcal{F}$ so, daß $A \subseteq \mathcal{F}$ ist, und das Paar $(\mathcal{F}, \mathrm{id}_A)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist.

Beweis: Wähle eine zu $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \setminus A\iota_{\mathcal{V},A}$ gleichmächtige und zu A disjunkte Menge $\mathcal{F}'$. Dann existiert eine bijektive Abbildung β' von $\mathcal{F}'$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \setminus A\iota_{\mathcal{V},A}$. Die Abbildung $\iota_{\mathcal{V},A}$ ist nach Voraussetzung bijektiv auf $A\iota_{\mathcal{V},A}$.

Setze $\mathcal{F} := A \cup \mathcal{F}'$. Dann ist diese Vereinigung disjunkt.
Definiere eine Abbildung $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ durch $f \mapsto \begin{cases} f\iota_{\mathcal{V},A} & \text{falls } f \in A \\ f\beta' & \text{falls } f \in \mathcal{F}' \end{cases}$.
Offensichtlich ist β bijektiv auf $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$.

Definiere auf $\mathcal{F}$ eine K-Algebren-Struktur via β, d.h. gerade so, daß β ein Isomorphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ ist.

Ferner gilt $\mathrm{id}_A\beta = \iota_{\mathcal{V},A}$.

Damit ist $(\mathcal{F}, \mathrm{id}_A)$ isomorph zu $(\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ im Sinne von Definition 1.19. Man überlegt sich leicht, daß dann $(\mathcal{F}, \mathrm{id}_A)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist. □

1.26.Beispiel. *Sei A eine Menge. Sei $\mathcal{V}$ nun die Varietät aller K-Algebren. Dann ist gerade $(\mathcal{F}_K(A), \mathrm{id}_A) \cong (\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$.*

Eine weitergehende Einführung in die *universelle Algebra* bietet das 2.Kapitel von [2]. Unter anderem findet sich dort eine eingehende Behandlung des Satzes von Birkhoff, der hier nur in der Fußnote auf Seite 10 erwähnt wurde.

2 Abgeleitete Algebren

2.1.Bezeichnungen. *Im folgenden bezeichnen wir für $k \in K^2$ mit k_1 die erste Komponente und mit k_2 die zweite Komponente des Paares k.*

2.2.Bemerkung und Definition. *Sei R eine K-Algebra, und sei $k \in K^2$. Definiere auf R eine Verknüpfung $\circ_k$ durch: $x \circ_k y := k_1 xy + k_2 yx$ für alle $x, y \in R$.
Dann ist $(R, \circ_k)$ eine K-Algebra. Sie heißt die* von R durch k abgeleitete Algebra *und wird mit $R^{(k)}$ bezeichnet.
Sei $A \subseteq R$. Dann heißt die von A erzeugte Teilalgebra von $R^{(k)}$ die* von R durch k bzgl. A abgeleitete Algebra.

Beweis: Nach Definition ist die Abilldung $\circ_k : R \times R \to R$ K-Linearkombination zweier K-bilinearer Abbildungen und somit selber K-bilinear. Also ist $R^{(k)}$ ein K-Algebra. □

2.3.Satz. *Sei R eine K-Algebra und sei $k \in K^2$.
Dann gilt:* End $R \subseteq$ End $R^{(k)}$.

Beweis: Sei $\psi \in$ End R. Dann ist ψ K-linear, und für alle $x, y \in R$ gilt:
$(x \circ_k y)\psi = (k_1 xy + k_2 yx)\psi = k_1\, x\psi\, y\psi + k_2\, y\psi\, x\psi = x\psi \circ_k y\psi$.
Also ist auch $\psi \in$ End $R^{(k)}$. □

2.4.Definition. *Seien $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren, A eine Menge und $k \in K^2$. Bezeichne mit $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ die von A erzeugte Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$.*[5]

2.5.Definition. *Seien A eine Menge, $\mathcal{F}$ eine K-Algebra und $\iota : A \to \mathcal{F}$ eine Abbildung.
Das Paar $(\mathcal{F}, \iota)$ heißt* in-sich frei über A, *wenn für alle Abbildungen $\varphi : A \to \mathcal{F}$ genau ein $\bar{\varphi} \in$ End $\mathcal{F}$ existiert mit $\iota\bar{\varphi} = \varphi$.
Das Paar $(\mathcal{F}, \iota)$ heißt* an-sich frei über A, *wenn es eine Varietät $\mathcal{V}$ von K-Algebren gibt, derart daß $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist.*

2.6.Satz. *Seien A eine Menge, $\mathcal{F}$ eine K-Algebra und $\iota : A \to \mathcal{F}$ eine Abbildung.
Das Paar $(\mathcal{F}, \iota)$ ist in-sich frei über A genau dann, wenn $(\mathcal{F}, \iota)$ an-sich frei über A ist.*

Genauer gilt: Ist $(\mathcal{F}, \iota)$ in-sich frei über A, so ist $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in der Varietät $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{F}))$.

Beweis: Es gelte, daß $(\mathcal{F}, \iota)$ an-sich frei über A ist. Dann existiert eine Varietät von K-Algebren so, daß $(\mathcal{F}, \iota)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist. Da $\mathcal{F} \in \mathcal{V}$ ist, ist $(\mathcal{F}, \iota)$ insbesondere in-sich frei über A.

[5] $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$ ist die von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ durch k abgeleitete Algebra, und $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ ist die von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ durch k bzgl. A abgeleitete Algebra.

Umgekehrt gelte, daß $(\mathcal{F},\iota)$ in-sich frei über A ist.
Setze $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{F}))$.

Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V},A),\iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\pi : \mathcal{F}(\mathcal{V},A) \to \mathcal{F}$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\pi = \iota$.

Im Beweis von 1.20 geht in Wahrheit nur ein, daß $(\mathcal{F},\iota)$ in-sich frei über A ist. Also wird $\mathcal{F}$ von $A\iota$ erzeugt.
Damit ist π surjektiv auf $\mathcal{F}$.

Sei $f \in \mathrm{Kern}(\pi)$.

Sei $\psi : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}$ ein Homomorphismus.

Dann existiert eine endliche Teilmenge A_0 von A so, daß f in der von $A_0\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V},A)$ enthalten ist.

Da A_0 endlich ist und X abzählbar ist, existiert eine injektive Abbildung $\beta : A_0 \to X$.

Wähle eine Abbildung $\varphi : X \to A$ mit $\varphi|_{A_0\beta} = \beta^{-1}$. Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V},X),\iota_{\mathcal{V},X})$ frei über X in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{F}(\mathcal{V},X) \to \mathcal{F}(\mathcal{V},A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varphi} = \varphi\iota_{\mathcal{V},A}$.

Wähle eine Abbildung $\gamma : A \to X$ mit $\gamma|_{A_0} = \beta$. Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V},A),\iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\bar{\gamma} : \mathcal{F}(\mathcal{V},A) \to \mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\gamma} = \gamma\iota_{\mathcal{V},X}$.

Dann gilt für alle $a_0 \in A_0$:
$a_0\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\gamma}\bar{\varphi} = a_0\gamma\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varphi} = a_0\gamma\varphi\iota_{\mathcal{V},A} = a_0\beta\beta^{-1}\iota_{\mathcal{V},A} = a_0\iota_{\mathcal{V},A}$.
Da f enthalten ist in der von $A_0\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{F}_K(A)$, folgt daraus:
$f\bar{\gamma}\bar{\varphi} = f$.

Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, existiert ein Homomorphismus $\nu : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ mit $\nu|_X = \iota_{\mathcal{V},X}$. Da $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ von $X\iota_{\mathcal{V},X}$ erzeugt wird, ist ν surjektiv auf $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$.

Da ν surjektiv auf $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ ist, existiert ein $g \in \mathcal{F}_K(X)$ mit $g\nu = f\bar{\gamma}$.

Sei $\delta : X \to \mathcal{F}_K(X)$ definiert durch $x \mapsto \begin{cases} x \text{ falls } x \in A_0\beta \\ 0 \text{ falls } x \in X \setminus A_0\beta \end{cases}$.
Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, existiert ein $\bar{\delta} \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}_K(X)$ mit $\bar{\delta}|_X = \delta$.

Sei $\varepsilon : X \to \mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ definiert durch $x \mapsto \begin{cases} x\iota_{\mathcal{V},X} & \text{falls } x \in A_0\beta \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus A_0\beta \end{cases}$.
Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V},X),\iota_{\mathcal{V},X})$ frei über X in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein $\bar{\varepsilon} \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ mit $\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varepsilon} = \varepsilon$.

Für alle $x \in A_0\beta$ gilt: $x\bar{\delta}\nu = x\delta\nu = x\nu = x\iota_{\mathcal{V},X} = x\varepsilon = x\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varepsilon} = x\nu\bar{\varepsilon}$,
und für alle $x \in X \setminus A_0\beta$ gilt: $x\bar{\delta}\nu = x\delta\nu = 0\nu = 0 = x\varepsilon = x\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varepsilon} = x\nu\bar{\varepsilon}$.

Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, folgt $\bar{\delta}\nu = \nu\bar{\varepsilon}$.

Da f in der von $A_0\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V},A)$ enthalten ist, ist $f\bar{\gamma}$ enthalten in der von $A_0\beta\iota_{\mathcal{V},X} = A_0\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\gamma}$ erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$.
Also gilt nach Definition von $\bar{\varepsilon}$: $f\bar{\gamma}\bar{\varepsilon} = f\bar{\gamma}$.

Es folgt: $g\bar{\delta}\nu\bar{\varphi} = g\nu\bar{\varepsilon}\bar{\varphi} = f\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}\bar{\varphi} = f\bar{\gamma}\bar{\varphi} = f$.

Da $(\mathcal{F},\iota)$ in-sich frei über A ist, und $\gamma\psi$ eine Abbildung von A nach $\mathcal{F}$ ist,
existiert ein $\bar{\psi} \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}$ mit $\iota\bar{\psi} = \gamma\psi$.

Dann gilt für alle $a_0 \in A_0$:
$a_0\beta\nu\bar{\varphi}\pi\bar{\psi} = a_0\beta\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varphi}\pi\bar{\psi} = a_0\beta\varphi\iota_{\mathcal{V},A}\pi\bar{\psi} = a_0\iota_{\mathcal{V},A}\pi\bar{\psi} = a_0\iota\bar{\psi} = a_0\gamma\psi = a_0\beta\psi.$

Da $g\bar{\delta}$ nach Definition von $\bar{\delta}$ in der von $A_0\beta$ erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{F}_K(X)$ enthalten ist, folgt daraus:
$g\bar{\delta}\psi = g\bar{\delta}\nu\bar{\varphi}\pi\bar{\psi} = f\pi\bar{\psi} = 0.$

Also erfüllt $\mathcal{F}$ die Identität $g\bar{\delta}$.

Nach Wahl von $\mathcal{V}$ erfüllt auch $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ die Identität $g\bar{\delta}$.
Da $\nu\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(X)$ nach $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ ist, folgt insbesondere:
$f = g\bar{\delta}\nu\bar{\varphi} = 0.$

Damit ist π auch injektiv.

Also ist $(\mathcal{F}, \iota)$ isomorph zu $(\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ und somit selber frei über A in $\mathcal{V}$. □

2.7.Definition. *Sei $k \in K^2$.*
Die Varietät $\mathcal{V}^{(k)} := \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)))$ heißt die von $\mathcal{V}$ durch k abgeleitete Varietät*.*

2.8.Korollar. *Seien $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren, A eine Menge und $k \in K^2$.*
Dann ist das Paar $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ an-sich frei über A.

Genauer ist $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in der Varietät $\mathcal{V}^{(k)}$.

Beweis: Sei $\varphi : A \to \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ eine Abbildung.
Dann ist φ eine Abbildung auch nach $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$. Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\psi \in \text{End } \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\psi = \varphi$. Nach Satz 2.3 ist auch $\psi \in \text{End } \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$.
Setze $\bar{\varphi} := \psi|_{\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V},A)}$.
Da $A\iota_{\mathcal{V},A}\psi = A\varphi \subseteq \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ ist, und $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ die von $A\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugte Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$ ist, ist auch $\bar{\varphi} \in \text{End } \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$.
Ferner gilt $\iota_{\mathcal{V},A}\bar{\varphi} = \iota_{\mathcal{V},A}\text{id}_{\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V},A)}\psi = \iota_{\mathcal{V},A}\psi = \varphi$.
Da $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ von $A\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugt wird, ist $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt.
Somit ist $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ in-sich frei über A. Mit 2.6 folgen daraus die Behauptungen.
□

3 Die freie assoziative Algebra

Die freie assoziative Algebra und die freie Halbgruppe

Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ die Varietät der assoziativen K-Algebren.

3.1.Bemerkung und Definition. *Nach 0.2 gibt es assoziative K-Algebren R mit $R \neq \{0\}$. Also ist nach 1.24 $\iota_{\mathcal{V},A}$ injektiv. Nach 1.25 existiert dann eine assoziative K-Algebra $\mathcal{F}$ so, daß $(\mathcal{F}, \text{id}_A)$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist.*
Wir wählen eine solche, bezeichnen sie mit $K\langle A\rangle$ und nennen sie die freie assoziative K-Algebra über A*.*

3.2. Definition und Bemerkung. *Die assoziative K-Algebra $K\langle A\rangle$ ist mit der Algebren-Multiplikation insbesondere eine Halbgruppe.*
Die von A erzeugte Teilhalbgruppe von $K\langle A\rangle$ bezeichnen wir mit A^+.
Die Halbgruppe A^+ ist in dem folgenden Sinne frei über A:

> *Für alle Halbgruppen H und alle Abbildungen $\varphi : A \to H$ existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : A^+ \to H$ mit $\bar{\varphi}|_A = \mathrm{id}_A$.*

Ferner ist A^+ eine K-Basis von $K\langle A\rangle$.

Die Menge der natürlichen Zahlen $I\!N$ ist zusammen mit der Addition eine Halbgruppe.
Also existiert genau ein Homomorphimus $l : A^+ \to I\!N$ mit $l(a) = 1$ für alle $a \in A$.
Für alle $w \in A^+$ heißt $|w| := l(w)$ die Länge *von w.*
Dann gilt gerade: $|a| = 1$ für alle $a \in A$ und $|xy| = |x|\,|y|$ für alle $x, y \in A^+$.
Für alle $n \in I\!N$ setze $A_n^+ := \{w \in A^+ \mid |w| = n\}$.
Dann gilt: $A^+ = \bigcup_{n\in I\!N} A_n^+$, und diese Vereinigung ist disjunkt.

Für alle $n \in I\!N$ setze $K\langle A\rangle_n := \langle A_n^+\rangle_K$. Dann ist $(K\langle A\rangle_n)_{n\in I\!N}$ eine Gradierung von $K\langle A\rangle$, und für alle $n \in I\!N$ ist A_n^+ eine K-Basis von $K\langle A\rangle_n$.[6]

3.3. Bemerkung und Definition. *Sei $w \in A^+$.*
Dann existieren eindeutig bestimmte $n \in I\!N$ und $w_1, \ldots, w_n \in A$ mit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.
Dann ist klar, daß $n = |w|$ ist.
Für alle $i \in n$ heißt w_i der i-te Buchstabe von w.

Beweis: Da die Verknüpfung auf A^+ assoziativ ist, und A^+ als Halbgruppe von A erzeugt wird, existieren $n \in I\!N$ und $w_1, \ldots, w_n \in A$ mit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.

Setze $W := \bigcup_{n\in I\!N} A^n$.
Die Elemente von W sind gerade die Tupel mit Einträgen aus A.

Definiere eine Verknüpfung auf W anschaulich durch Hintereianderschreiben zweier Tupel aus W, also definiere für $n, m \in I\!N$, $f \in A^n$, $g \in A^m$:

$$fg : \underline{n+m}| \to A, i \mapsto \begin{cases} f(i) & \text{falls } 1 \le i \le n \\ g(i-n) & \text{falls } n+1 \le i \le n+m \end{cases}.$$

Man rechnet leicht nach, daß W damit eine Halbgruppe ist.

Da A^+ frei über A ist, existiert ein Homomorphismus $\varphi : A^+ \to W$ mit: $a\varphi = (a)$.

Zur Eindeutigkeit seien nun $m \in I\!N$ und $v_1, \ldots, v_m \in A$ mit $v = v_1 v_2 \cdots v_m$.
Dann gilt: $(w_1, \ldots, w_n) = (w_1) \cdots (w_n) = w\varphi = (v_1) \cdots (v_m) = (v_1, \ldots, v_m)$,
also $m = n$ und $v_i = w_i$ für alle $i \in \underline{m}|$. □

3.4. Korollar. *Es gelte, daß A endlich ist. Setze $k := |A|$. Sei $n \in I\!N$.*
Dann gilt: $\dim_K K\langle A\rangle_n = |A_n^+| = k^n$.

3.5. Definition und Bemerkung. *Eine Ordnung $\le$ auf A^+ heißt* lexikographische Ordnung *auf A^+, wenn $\le|_A$ eine totale Ordnung auf A ist und für alle $u, v \in A^+$ gilt:*
$u < v \iff v \in uA^+ \vee \exists\, k \in \underline{\min\{|u|, |v|\}}|\ (\forall\, i \in \underline{k-1}|\ u_i = v_i \wedge u_k < v_k)$.

[6] Vergleiche dies mit dem Zusammenhang zwischen der freien Algebra und dem freien Magma, wie in Kapitel 1 dargestellt.

Dann ist klar, daß umgekehrt zu jeder totalen Ordnung $\preceq$ auf A genau eine lexikographische Ordnung $\leq$ existiert mit $\leq|_A = \preceq$.

3.6.Definition und Bemerkung. *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die K-Bilinearform, bzgl. der die Basis A^+ von $K\langle A\rangle$ eine Orthonormalbasis ist.*
Dann gilt für alle $f \in K\langle A\rangle$: $f = \sum_{w\in A^+}\langle f, w\rangle w$.

Lyndonworte

Die hier gegebene Behandlung von Lyndon-Worten findet sich z.B. im Kapitel 5.1 von [4].

Seien A eine Menge und $\leq$ eine lexikographische Ordnung auf A^+.

3.7.Definition. *Ein $w \in A^+$ heißt* Lyndonwort, *wenn für alle $u, v \in A^+$ mit $w = uv$ gilt $w < vu$. Die Menge aller Lyndonworte aus A^+ werde mit L bezeichnet. Für alle $n \in I\!N$ setze $L_n := A_n^+ \cap L$.*

3.8.Lemma. *Sei $w \in A^+$.*
Dann ist $w \in L$ genau dann, wenn für alle $v \in A^+$ mit $w \in A^+v$ gilt $w < v$.

Beweis: „$\Longleftarrow$“ : Seien $u, v \in A^+$ mit $w = uv$. Nach Voraussetzung gilt $w < v$, also $w < v < vu$.

„$\Longrightarrow$“ : Sei $v \in A^+$ mit $w \in A^+v$. Dann existiert ein $u \in A^+$ mit $w = uv$.
Schreibe $w = xy$ mit $x, y \in A^+$ und $|x| = |v|$.
Da $w \in L$ ist, gilt $xy = w < vu$, d.h.: ($x = v$ und $y < u$) oder $x < v$.
Annahme, es gilt $x = v$. Dann gilt $y < u$. Da $|y| = |u|$ ist, folgt $yx = yv < uv = w = xy$ im Widerspruch zu $w \in L$.
Also gilt $x \neq v$, also $x < v$. Mit $|x| = |v|$ folgt $w = xy < v$. □

3.9.Lemma. *Seien $u, v \in L$ mit $u < v$. Dann ist auch $uv \in L$.*

Beweis: Sei $y \in A^+$ mit $uv \in A^+y$. Dann ist nach 3.8 zu zeigen: $uv < y$.

1.Fall: $v \in A^+y$. Ist $v \notin uA^+$, so folgt aus $u < v$ die Ungleichung $uv < v$. Ist $v \in uA^+$, so existiert ein $r \in A^+$ mit $v = ur$, woraus nach 3.8 $v < r$ folgt, also $uv < ur = v$. Es gilt in beiden Fällen: $uv < v$. Nach 3.8 ist $v < y$. Es folgt $uv < y$.

2.Fall: $v \notin A^+y$. Dann existieren $s, t \in A^+$ mit $u = st$ und $y = tv$. Da $u \in L$ ist, gilt nach 3.8 $u < t$. Da $|u| > |t|$ ist, folgt daraus $uv < tv = y$.
Also gilt $uv < y$. □

3.10.Lemma. *Sei $w \in L$. Dann existieren $u, v \in L$ mit $w = uv$.*

Beweis: Setze $v := \min\{r \in A^+ \,|\, w \in A^+r\}$. Dann existiert ein $u \in A^+$ mit $w = uv$.

Sei $y \in A^+$ mit $v \in A^+y$. Dann gilt auch $w \in A^+y$. Nach Wahl von v gilt $v \leq y$, also gilt, wegen $v \in A^+y$, $v < y$. Mit 3.8 folgt $v \in L$.

Nun sei $y \in A^+$ mit $u \in A^+y$. Dann existiert ein $x \in A^+$ mit $u = xy$.
Es gilt $yv \notin L$, denn sonst wäre nach 3.8 $yv < v$ und $w \in A^+yv$, im Widerspruch zur Wahl von v.

Nach 3.8 existiert ein $t \in A^+$ mit $yv \in A^+t$ und $t \leq yv$. Dann existiert ein $z \in A^+$ mit $yv = zt$.
Annahme: $y < t$. Dann gilt $y < t \leq yv$. Dann ist $t = ys$ für ein $s \in A^+$ mit $s \leq v$. Es folgt $yv = zt = zys$. Da $|zy| > |y|$ ist, folgt $v \in A^+s$, also nach 3.8 $v < s$ im Widerspruch zu $s \leq v$. Also ist $t \leq y$.
Nach 3.8 gilt $xzt = w < t$. Es folgt: $u < uv = xyv = xzt < t \leq y$. Also gilt $u < y$. Mit 3.8 folgt $u \in L$. □

3.11.Satz. *Für alle $w \in A^+$ existieren eindeutig bestimmte $k \in I\!N$ und $l_1, l_2, \ldots, l_k \in L$ mit $w = l_1 l_2 \cdots l_k$ und $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_k$.*

Beweis: Sei $w \in A^+$.
Zur Existenz:
Da $w = w_1 w_2 \cdots w_{|w|}$ und $w_i \in A \subseteq L$ für alle $i \in \underline{|w|}\rfloor$ gilt, existieren $k \in I\!N$ und $l_1, l_2, \ldots, l_k \in L$ mit $w = l_1 l_2 \cdots l_k$. Wähle solche k und $l_1, l_2, \ldots, l_k$ mit k minimal.
Es bleibt zu zeigen: $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_k$.
Annahme, es existiert ein $i \in \underline{k-1}\rfloor$ mit $l_i < l_{i+1}$. Setze $l' := l_i l_{i+1}$ Nach 3.9 ist dann $l' \in L$, und es gilt $l_1 \cdots l_{i-1} l' l_{i+2} \cdots l_k$ im Widerspruch zur Minimalität von k.

Zur Eindeutigkeit:
Seien weitere $k' \in I\!N$ und $l'_1, l'_2, \ldots, l'_{k'} \in L$ mit $w = l'_1 l'_2 \cdots l'_{k'}$ und $l'_1 \geq l'_2 \geq \ldots \geq l'_{k'}$.
Annahme, es gilt nicht: $k = k'$ und $l_i = l'_i$ für alle $i \in \underline{k}\rfloor$.
O.B.d.A. gilt dann $l_1 \neq l'_1$ und ferner $|l_1| < |l'_1|$. Dann existieren $j \in \underline{k-1}\rfloor$ und $u \in A^+$ mit $l'_1 = l_1 \cdots l_j u$ und $l_{j+1} \in uA^+$. Es folgt mit 3.8: $l_1 < l'_1 < u < l_{j+1} \leq l_j \leq \ldots \leq l_1$, Widerspruch. □

3.12.Korollar. *Es gelte, daß A endlich ist. Setze $k := |A|$.*
Für alle $n \in I\!N$ setze $\psi(n) := |L_n|$. Dann gilt für alle $n \in I\!N$:

$$\psi(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) k^d \quad ,$$

wobei μ die zahlentheoretische Möbiusfunktion ist.

Beweis: Nach 3.4 ist $|A_n^+| = k^n$, also folgt aus 3.11 die folgende Gleichung im Ring $I\!R[[x]]$ der formalen Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n = \prod_{l \in L} \sum_{m=0}^{\infty} (x^{|l|})^m \quad .$$

Es gelten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n = \frac{1}{1-kx}$$

und

$$\prod_{l \in L} \sum_{m=0}^{\infty} (x^{|l|})^m = \prod_{l \in L} \frac{1}{1-x^{|l|}} = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^d)^{\psi(d)}} \quad .$$

Mit den üblichen Rechenregeln des natürlichen Logarithmus ln und der Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n$$

folgen:

$$\ln(\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n) = -\ln(1-kx) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(-kx)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}k^n x^n$$

und

$$\ln(\prod_{l\in L}\sum_{m=0}^{\infty}(x^{|l|})^m) = \sum_{d=1}^{\infty} -\psi(d)\ln(1-x^d) =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} -\psi(d)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}(-x^d)^m = \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi(d)\frac{1}{m}x^{dm} \quad .$$

Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}k^n x^n = \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi(d)\frac{1}{m}x^{dm} \quad .$$

Ein Koeffizientenvergleich ergigbt für alle $n \in I\!N$:

$$\frac{1}{n}k^n = \sum_{d|n}\psi(d)\frac{1}{n/d} \quad ,$$

also

$$k^n = \sum_{d|n}\psi(d)d \quad .$$

Mit der Möbius-Inversions-Formel ist dies äquivalent zu

$$\psi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(n/d)k^d \quad .$$

□

4 Die freie Lie-Algebra

Seien A eine Menge, $\leq$ eine lexikographische Ordnung auf A^+ und $\mathcal{V}$ die Varietät der K-Lie-Algebren.

4.1.Definition und Bemerkung. *Setze $\mathcal{L}_K(A) := K^{(1,-1)}\langle A\rangle$.*
Dann ist $\mathcal{L}_K(A)$ eine Lie-Algebra.
Für alle $x, y \in \mathcal{L}_K(A)$ schreiben wir $[xy]$ statt $x \circ_{(1,-1)} y$.

4.2.Definition und Bemerkung. *Für alle $n \in I\!N$ setze $\mathcal{L}_K(A)_n := K\langle A\rangle_n \cap \mathcal{L}_K(A)$.*
Dann ist $(\mathcal{L}_K(A)_n)_{n\in I\!N}$ eine Gradierung von $\mathcal{L}_K(A)$.

4.3.Defintion und Bemerkung.
Sei α der Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $K\langle A\rangle$ mit $\alpha|_A = \mathrm{id}_A$.
Sei β der Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{L}_K(A)$ mit $\beta|_A = \mathrm{id}_A$.
Sei λ der Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ mit $\lambda|_A = \mathrm{id}_A$.
Sei π der Homomorphismus von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{L}_K(A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\pi = \mathrm{id}_A$.

(Diese Homomorphismen existieren und sind eindeutig bestimmt, da $\mathcal{F}_K(A)$ frei über A ist, und $(\mathcal{F}(\mathcal{V},A),\iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist.)
Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V},A),\iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, gilt $\lambda\pi=\beta$.
Da $\mathcal{L}_K(A)$ von A erzeugt wird, ist π surjektiv auf $\mathcal{L}_K(A)$.
Für alle $x\in\mathcal{F}_K(A)$ setze $\overline{x}:=x\alpha$.

Eine Basis der freien Lie-Algebra, aus Lyndonworten gemacht

Ziel dieses Abschnitts ist es, K-Basen von $\mathcal{L}_K(A)$ konkret anzugeben. Diese Basen bestehen, anschaulich gesprochen, aus Lyndonworten, die mit Lie-Klammern $[,]$ vollständig geklammert sind. In diesem Zusammenhang wird auch ein klassisches Resultat gezeigt, das zuerst von Witt in [6] bewiesen wurde, nämlich daß gilt: $\mathcal{F}(\mathcal{V},A)\cong\mathcal{L}_K(A)$, bzw. äquivalent dazu, daß das Paar $(\mathcal{L}_K(A),\mathrm{id}_A)$ frei über A in der Varietät $\mathcal{V}$ der K-Lie-Algebren ist.

4.4.Defintion und Bemerkung. *Für alle $n\in\mathbb{N}$ definiere $B_n\subseteq\mathcal{M}(A)$ rekursiv durch:*
$B_1:=A$ und $B_n:=\bigcup_{k=1}^{n-1}\{xy\,|\,x\in B_k,\ y\in B_{n-k},\ \overline{x}<\overline{y}\}$.
Setze $B:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt dann $B_n=\mathcal{M}(A)_n\cap B$.
Die Elemente von B heißen Lyndonbäume.

4.5.Bemerkung. *Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $B_n\alpha=L_n$.*

Beweis: Mit 3.10 und 3.9 ist der Beweis eine leichte Induktion. □

Mit dem Begriff *Lyndonbaum* und dieser Bemerkung ist die Vorstellung von *geklammerten Lyndonworten* präzisiert.

4.6.Lemma. *Für alle $x\in B$ gilt: $x\beta-\overline{x}\in\langle w\in A^+\,|\,\overline{x}<w\rangle_K$.*

Beweis: durch Induktion nach $|x|$.
Ist $|x|=1$, so ist $x\in A$, also gilt $x\beta-\overline{x}=x-x=0\in\langle w\in A^+\,|\,\overline{x}<w\rangle_K$.
Sei also $x\in B$ mit $|x|>1$. Nach Definition von B existieren dann $u,v\in B$ mit $x=uv$ und $\overline{u}<\overline{v}$. Es sind $|u|,|v|<|x|$, also existieren nach Induktionsvoraussetzung $r\in\langle w\in A^+\,|\,\overline{u}<w\rangle_K$ mit $u\beta=\overline{u}+r$ und $s\in\langle w\in A^+\,|\,\overline{v}<w\rangle_K$ mit $v\beta=\overline{v}+s$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}x\beta-\overline{x}&=[u\beta,v\beta]-\overline{u}\,\overline{v}\\&=[\overline{u}+r,\overline{v}+s]-\overline{u}\,\overline{v}\\&=[\overline{u},\overline{v}]+[\overline{u},s]+[r,\overline{v}]+[r,s]-\overline{u}\,\overline{v}\\&=-\overline{v}\,\overline{u}+\overline{u}s-s\overline{u}+\overline{v}r-r\overline{v}+rs-sr\quad.\end{aligned}$$

Daß diese Summanden aus $\langle w\in A^+\,|\,\overline{x}<w\rangle_K$ sind, folgt für $\overline{v}\,\overline{u}$ aus $\overline{u}\,\overline{v}=\overline{x}\in L$, und dann für die übrigen mit naheliegenden Eigenschaften der lexikographischen Ordnung.
Dann gilt insgesamt $x\beta-\overline{x}\in\langle w\in A^+\,|\,\overline{x}<w\rangle_K$. □

4.7.Satz. *Sei $B'\subseteq B$ mit $\alpha|_{B'}$ injektiv.*
Dann ist $B'\beta$ K-linear unabhängig.

Beweis: Sei $\kappa : B' \to K$ mit $\{0\}\kappa^{-1}$ endlich und $\sum_{x\in B'} x\kappa\, x = 0$.
Annahme: $\kappa \neq 0$.
Wähle $x_0 \in B'$ mit $x_0\kappa \neq 0$ und $\overline{x_0}$ minimal.
Da $\alpha|_{B'}$ injektiv ist, ist $x_0 \notin \{x \in B' \mid \overline{x_0} < \overline{x}\}$, also $0 = x_0\kappa\, x_0 + \sum_{\substack{x\in B' \\ \overline{x_0}<\overline{x}}} x\kappa\, x$.
Es folgt: $0 = x_0\kappa\, x_0\beta + \sum_{\substack{x\in B' \\ \overline{x_0}<\overline{x}}} x\kappa\, x\beta$.
Nach 4.6 folgt: $0 \in x_0\kappa\, \overline{x_0} + \langle w \in A^+ \mid \overline{x_0} < w\rangle_K$.
Da A^+ linear unabhängig ist, folgt $x_0\kappa = 0$ im Widerspruch zur Wahl von x_0.
Also gilt $\kappa = 0$. $\square$

4.8.Definition und Bemerkung. *Definiere auf B eine Relation $\sim$ durch:*
$x \sim y :\Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$ *und* $x\lambda - y\lambda \in \langle w\lambda \mid w \in B, \overline{x} < \overline{w}\rangle_K$.
Die Relation $\sim$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

4.9.Bemerkung. *Seien $x, y, z \in B$. Dann gelten:*
(1) $xz, yz \in B$ und $x \sim y \Longrightarrow xz \sim yz$.
(2) $zx, zy \in B$ und $x \sim y \Longrightarrow zx \sim zy$.

4.10.Lemma. *Seien $x, y, z \in B$ mit $(xy)z, x(yz) \in B$.*
Dann gilt $(xy)z \sim x(yz)$.

Beweis: Nach Definition von B gilt dann $xy, yz \in B$ und $\overline{x} < \overline{y}$, $\overline{y} < \overline{z}$. Es folgt $\overline{x} < \overline{z}$, also auch $xz \in B$.

Es gilt $\overline{(xy)z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x(yz)}$.

Es gilt $((xy)z)\lambda - (x(yz))\lambda = (x\lambda\, y\lambda)\, z\lambda - x\lambda\,(y\lambda\, z\lambda) = (x\lambda\, z\lambda)\, y\lambda = ((xz)y)\lambda$ und $((xy)z)\lambda - (x(yz))\lambda = (x\lambda\, z\lambda)\, y\lambda = -y\lambda\,(x\lambda\, z\lambda) = -(y(xz))\lambda$.

Ist $\overline{xz} < \overline{y}$, so ist $(xz)y \in B$, und es gilt $\overline{(xy)z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} < \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{y} = \overline{(xz)y}$.

Ist $\overline{y} < \overline{xz}$, so ist $y(xz) \in B$, und es gilt $\overline{(xy)z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} < \overline{y}\,\overline{x}\,\overline{z} = \overline{y(xz)}$.

In beiden Fällen folgt $((xy)z)\lambda - (x(yz))\lambda \in \langle w\lambda \mid w \in B, \overline{(xy)z} < \overline{w}\rangle_K$.

Also gilt $(xy)z \sim x(yz)$. $\square$

Die folgende Definition dient bloß der übersichtlicheren Formulierung des Beweises des dann folgenden Lemmas.

4.11.Definition. *Seien $x, y \in \mathcal{M}(A)$ und sei $t \in A^+$. Dann heißen x und y* verbunden *durch t, geschrieben $x \approx_t y$, wenn es $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{M}(A)$ gibt mit $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$ und $\overline{x_1}\, t = \overline{y_1}$, $\overline{x_2} = t\,\overline{y_2}$.*

4.12.Lemma. *Für alle $x, y \in B$ gilt: $\overline{x} = \overline{y} \Longrightarrow x \sim y$.*

Beweis: Es genügt, durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage zu zeigen:

$$\forall_{x,y\in B_n} : \overline{x} = \overline{y} \Longrightarrow x \sim y \quad .$$

Ist $n = 1$ und sind $x, y \in B_1$ mit $\overline{x} = \overline{y}$, so gilt $x = \overline{x} = \overline{y} = y$, also $x \sim y$.
Sei also $n \in \mathbb{N}_{>1}$, und es gelte die obige Aussasge für alle $n' \in \underline{n-1|}$. Seien $x, y \in B_n$.
Dann existieren $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B$ mit $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$. O.B.d.A. gelte $|x_1| < |y_1|$.

Wegen $\overline{x_1}\,\overline{x_2} = \overline{x} = \overline{y} = \overline{y_1}\,\overline{y_2}$ existiert dann ein $t \in A^+$ mit $\overline{x_1}\,t = \overline{y_1}$ und $\overline{x_2} = t\,\overline{y_2}$; oder anders formuliert, es gilt $x \approx_t y$.

Zunächst betrachten wir den einfacheren Fall: $t \in L$.
Nach 4.5 wähle $s \in B$ mit $\overline{s} = t$.
Da $\overline{x_1}\,\overline{s} = \overline{y_1} \in L$ ist, gilt nach 3.8 $\overline{x_1} < \overline{x_1}\,\overline{s} < \overline{s}$, also ist nach Definition von B $x_1 s \in B$. Ebenso ist $sy_2 \in B$.
Da $\overline{x_1 s} = \overline{y_1}$ ist, gilt mit Induktionsvoraussetzung $x_1 s \sim y_1$. Ebenso gilt $x_2 \sim sy_2$.
Mit 4.9 folgt $x = x_1x_2 \sim x_1(sy_2)$ und $y = y_1y_2 \sim (x_1s)y_2$.
Mit 4.10 folgt daraus $x \sim y$.

Nun sei $t \in A^+$ beliebig.
Nach 3.11 existieren $k \in I\!N$, $t_1, t_2, \ldots, t_k \in L$ mit $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_k$ und $t = t_1t_2\cdots t_k$.
Mit 3.8 und 3.10 liefert jeweils eine leichte Induktion, daß für alle $j \in \underline{k\rfloor}_0$ gelten:

$$\overline{x_1}\,t_1\cdots t_j \in L \quad \text{und} \quad t_{j+1}\cdots t_k\,\overline{y_1} \in L \quad .$$

Für jedes $j \in \underline{k\rfloor}_0$ wähle nach 4.5 $y_1^{(j)}, y_2^{(j)} \in B$ mit

$$\overline{y_1^{(j)}} = \overline{x_1}\,t_1\cdots t_j \quad \text{und} \quad \overline{y_2^{(j)}} = t_{j+1}\cdots t_k\,\overline{y_1} \quad .$$

Für jedes $j \in \underline{k\rfloor}_0$ setze $y^{(j)} = y_1^{(j)}y_2^{(j)}$.
Nun ist es gerade so eingerichtet, daß gilt:

$$y^{(0)} \approx_{t_1} y^{(1)} \approx_{t_2} \ldots \approx_{t_k} y^{(k)} \quad .$$

Da für alle $j \in \underline{k\rfloor}$ $t_j \in L$ ist, folgt jeweils wie oben im einfacheren Fall, daß gilt:

$$y^{(0)} \sim y^{(1)} \sim \ldots \sim y^{(k)} \quad .$$

Ferner gelten $\overline{x_1} = \overline{y_1^{(0)}}$, $\overline{x_2} = \overline{y_2^{(0)}}$, $\overline{y_1} = \overline{y_1^{(k)}}$ und $\overline{y_2} = \overline{y_2^{(k)}}$.
Also gelten nach Induktionsvoraussetzung $x_1 \sim y_1^{(0)}$, $x_2 \sim y_2^{(0)}$, $y_1 \sim y_1^{(k)}$ und $y_2 \sim y_2^{(k)}$.
Mit 4.9 folgt $x \sim y^{(0)}$ und $y \sim y^{(k)}$.
Insgesamt gilt $x \sim y$. □

4.13.Satz. *Sei $B' \subseteq B$ mit $\alpha|_{B'}$ surjektiv auf L.*
Dann ist $\langle B'\lambda\rangle_K = \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$.

Beweis: Offensichtlich gilt $\langle \mathcal{M}(A)\lambda\rangle_K = \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$.
Also genügt zu zeigen: $w\lambda \in \langle B'\lambda\rangle_K$ für alle $w \in \mathcal{M}(A)$.
Für alle $w \in \mathcal{M}(A)$ existiert eine endliche Teilmenge A_0 von A so. daß w in dem von A_0 erzeugten Teilmagma von $\mathcal{M}(A)$ enthalten ist. Also kann man o.B.d.A. annehmen, daß A endlich ist.
Aus der Antikommutativität von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ folgt, daß für alle $w \in \mathcal{M}(A)$ ein $x \in B$ existiert mit $w_0\lambda \in \{x\lambda, -x\lambda\}$.
Also genügt zu zeigen: $x\lambda \in \langle B'\lambda\rangle_K$ für alle $x \in B$.
Annahme, dies ist falsch. Dann existiert ein $x \in B$ mit $x\lambda \notin \langle B'\lambda\rangle_K$. Wähle $n \in I\!N$ minimal mit der Eigenschaft, daß ein $x \in B_n$ existiert mit $x\lambda \notin \langle B'\lambda\rangle_K$. Dann wähle $x \in B_n$

mit $x\lambda \notin \langle B'\lambda\rangle_K$ und $\overline{x}$ maximal; dies ist möglich, da A und somit auch B_n endlich ist. Es gilt $\overline{x} \in L$, also existiert nach Voraussetzung ein $y \in B'$ mit $\overline{x} = \overline{y}$. Mit 4.12 folgt daraus $x \sim y$, also $x\lambda \in y\lambda + \langle w\lambda \mid w \in B,\, \overline{x} < \overline{w}\,\rangle_K$. Nach Wahl von x folgt $w\lambda \in \langle B'\lambda\rangle_K$ für alle $w \in B$ mit $\overline{x} < \overline{w}$, also auch $x\lambda \in \langle B'\lambda\rangle_K$, Widerspruch. □

4.14.Satz. *Es existiert ein $B' \subseteq B$ mit $\alpha|_{B'}$ bijektiv auf L.*
Dann gelten:
(1) $B'\beta$ Basis von $\mathcal{L}_K(A)$,
(2) $B'\lambda$ Basis von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$.
Es folgt:
(3) $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \cong \mathcal{L}_K(A)$.

Beweis: Nach 4.5 ist $\alpha|_B$ surjektiv auf L. Dann existiert ein Abbildung $\gamma : L \to B$ mit $\gamma(\alpha|_B) = \mathrm{id}_L$.[7] Setze $B' := L\gamma$. Dann gilt $\gamma(\alpha|_{B'}) = \mathrm{id}_L$. Ferner gilt $\alpha|_{B'}\gamma = \mathrm{id}_{B'}$, denn für alle $y \in B'$ existiert ein $x \in L$ mit $y = x\gamma$, woraus folgt $y\,(\alpha|_{B'})\gamma = x\gamma(\alpha|_{B'})\gamma = x\,\mathrm{id}_L\gamma = x\gamma = y$. Also ist $\alpha|_{B'}$ bijektiv auf L.
Nach 4.7 ist $B'\beta$ K-linear unabhängig. Wegen $\beta = \lambda\pi$ ist auch $B'\lambda$ K-linear unabhängig. Nach 4.13 gilt $\langle B'\lambda\rangle_K = \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$. Da π surjektiv auf $\mathcal{L}_K(A)$ ist, und $\beta = \lambda\pi$ gilt, folgt $\langle B'\beta\rangle_K = \mathcal{L}_K(A)$. Also gilt (1) und (2).
Nun bleibt π nichts anderes mehr übrig, als ein Isomorphismus zu sein. Also gilt (3). □

4.15.Korollar (Witt'sche Dimensionsformel) .
Es gelte, daß A endlich ist. Setze $k := |A|$.
Dann gilt für alle $n \in I\!N$:

$$\dim_K \mathcal{L}_K(A)_n = |L_n| = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(n/d)k^d \quad ,$$

wobei μ die zahlentheoretische Möbiusfunktion ist.

Beweis: klar nach 4.14 und 3.12. □

Der Satz von Dynkin-Specht-Wever

Sei K nun ein Körper der Charakteristik 0.

In diesem Abschnitt wird der klassische Satz von Dynkin-Specht-Wever gezeigt, der ein wichtiges Kriterium dafür liefert, ob ein gegebenes Element aus $K\langle A\rangle$ schon aus $\mathcal{L}_K(A)$ ist. Die hier gegebene Formulierung des Satzes und die benutzte Beweisidee stammt aus der Aufgabe 5.3.1 in [4].

4.16.Definition. *Definiere $\omega \in \mathrm{End}_K\, K\langle A\rangle$ zunächst auf A^+ rekursiv durch:*
$a\omega := a$ für $a \in A$,
$(xa)\omega := [x\omega, a]$ für $x \in A^+$, $a \in A$,
und anschließend durch K-lineare Fortsetzung.

[7] Die Benutzung des Auswahlaxioms kann man hier dadurch umgehen, daß man mit 3.10, 3.9 und der Definition von B die Abbildung γ rekursiv definiert.

4.17.Definition und Bemerkung.
Für alle $a \in A$ *definiere* $\mu_a : K\langle A\rangle \to K\langle A\rangle$ *durch* $x \mapsto [x, a]$.
Offensichtlich ist dann $\mu_a \in \operatorname{End}_K K\langle A\rangle$ *für alle* $a \in A$.
Also ist die Abbildung $\mu : A \to \operatorname{End}_K K\langle A\rangle, a \mapsto \mu_a$ *eine Abbildung von A in die assoziative K-Algebra der Endomorphismen des K-Moduls* $K\langle A\rangle$.
Da $K\langle A\rangle$ *als assoziative K-Algebra frei über A ist, existiert genau ein Homomorphismus* $\bar{\mu} : K\langle A\rangle \to \operatorname{End}_K K\langle A\rangle$, $x \mapsto \bar{\mu}_x$ *mit* $\bar{\mu}|_A = \mu$.

4.18.Lemma. *Für alle* $x, y \in K\langle A\rangle$ *gilt:* $(xy)\omega = x\omega\bar{\mu}_y$.

Beweis: Sei $x \in A^+$. Dann ist für alle $y \in K\langle A\rangle$ zu zeigen: $(xy)\omega = x\omega\bar{\mu}_y$. Zeige dies durch Induktion nach $|y|$.

Ist $|y| = 1$, so ist $y \in A$, und somit gilt $(xy)\omega = [x\omega, y] = x\omega\mu_y = x\omega\bar{\mu}_y$.
Sei also $|y| > 1$. Dann existieren $y' \in A^+$ und $a \in A$ mit $y = y'a$. Es ist $|y'| < |y|$. Also gilt mit Induktionsvoraussetzung: $(xy)\omega = (x(y'a))\omega = ((xy')a)\omega = [(xy')\omega, a] = [x\omega\bar{\mu}_{y'}, a] = x\omega\bar{\mu}_{y'}\bar{\mu}_a = x\omega\bar{\mu}_{y'a} = x\omega\bar{\mu}_y$. □

4.19.Lemma. *Für alle* $x, y \in \mathcal{L}_K(A)$ *gilt:* $x\bar{\mu}_y = [x, y]$.

Beweis: Für alle $x \in \mathcal{L}_K(A)$ definiere $\alpha_y : \mathcal{L}_K(A) \to \mathcal{L}_K(A)$ durch $x \mapsto [x, y]$; offensichtlich ist $\alpha_y \in \operatorname{End}_K \mathcal{L}_K(A)$.

Die assoziative K-Algebra $\operatorname{End}_K \mathcal{L}_K(A)$ ist zusammen mit der durch $[\varphi, \psi] := \varphi\psi - \psi\varphi$ definierten Multiplikation eine Lie-Algebra.

Für alle $z, x, y \in \mathcal{L}_K(A)$ gilt: $z\alpha_{xy} = [z, [x, y]] = [[z, x], y] - [[z, y], x] = z(\alpha_x\alpha_y - \alpha_y\alpha_x) = z[\alpha_x, \alpha_y]$.
Also ist α ein Homomorphismus von $\mathcal{L}_K(A)$ nach $\operatorname{End}_K \mathcal{L}_K(A)$.

Da $\bar{\mu}$ ein Homomorphismus von $K\langle A\rangle$ in die assoziative Algebra $\operatorname{End}_K \mathcal{L}_K(A)$ ist, ist $\bar{\mu}|_{\mathcal{L}_K(A)}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{L}_K(A)$ in die Lie-Algebra $\operatorname{End}_K \mathcal{L}_K(A)$.

Für alle $x \in \mathcal{L}_K(A)$ und für alle $a \in A$ gilt nach Definition: $x\bar{\mu}_a = [x, a] = x\alpha_a$. Also gilt $(\bar{\mu}|_{\mathcal{L}_K(A)})|_A = \alpha|_A$. Da $(\mathcal{L}_K(A), \mathrm{id}_A)$ frei über A in der Varietät der K-Lie-Algebren ist, folgt $\bar{\mu}|_{\mathcal{L}_K(A)} = \alpha$ und somit die Behauptung. □

4.20.Lemma. *Für alle* $x, y \in \mathcal{L}_K(A)$ *gilt:* $[x, y]\omega = [x\omega, y] + [x, y\omega]$.

Beweis: Seien $x, y \in \mathcal{L}_K(A)$. Dann gilt nach 4.18 und 4.19 : $[x, y]\omega = (xy - yx)\omega = (xy)\omega - (yx)\omega = x\omega\bar{\mu}_y - y\omega\bar{\mu}_x = [x\omega, y] - [y\omega, x] = [x\omega, y] + [x, y\omega]$. □

4.21.Satz von Dynkin-Specht-Wever. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und für alle* $x \in K\langle A\rangle_n$ *gilt:* $x \in \mathcal{L}_K(A) \iff x\omega = nx$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“. Es genügt zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle Monome x aus der Lie-Algebra $\mathcal{L}_K(A)$, die auch aus $K\langle A\rangle_n$ sind, $x\omega = nx$ gilt. Zeige dies durch eine Induktion nach n.

Ist $n = 1$ und ist x ein Monom aus $\mathcal{L}_K(A)$ mit $x \in K\langle A\rangle_n$, so ist $x \in A$, also gilt nach Definition $x\omega = x = 1x$.

Sei also $n > 1$.
Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ und Monome y, z in $\mathcal{L}_K(A)$ mit $y \in K\langle A\rangle_i$ und $z \in K\langle A\rangle_j$,

$x = [y, z]$, $i + j = n$ und $i, j < n$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung: $y\omega = iy$ und $z\omega = jz$.

Es folgt mit 4.20 : $x\omega = [y, z]\omega = [y\omega, z] + [y, z\omega] = [iy, z] + [y, jz] = (i + j)[y, z] = nx$.

„$\Longleftarrow$". Sei $n \in I\!N$. Da K von Charakteristik 0 ist, existiert ein $\bar{n} \in K$ so, daß die Skalarmultiplikation mit $\bar{n}$ schlichtweg dieselbe Abbildung liefert wie die Vervielfachung mit n.[8]
Da K ein Körper ist, ist $\bar{n}$ invertierbar.
Sei $x \in K\langle A\rangle_n$ mit $x\omega = nx$.

Es folgt: $x = \bar{n}^{-1}nx = \bar{n}^{-1}x\omega \in \mathcal{L}_K(A)$. □

4.22.Definition und Korollar.
Definiere $\eta \in \mathrm{End}_K\, K\langle A\rangle$ *durch* $x\eta := nx$ *für* $n \in I\!N$, $x \in K\langle A\rangle_n$, *und anschließende K-lineare Fortsetzung.*

Da K ein Körper von Charakteristik 0 ist, ist η *bijektiv auf* $K\langle A\rangle$.

Aus 4.21 folgt: $\omega^2 = \eta\omega$ *und* $\mathrm{Bild}(\omega) = \mathcal{L}_K(A)$.

Es folgt: $\mathrm{Kern}(\omega) = \mathrm{Bild}(\eta - \omega)$ *und* $\mathrm{Kern}(\eta - \omega) = \mathrm{Bild}(\omega) = \mathcal{L}_K(A)$.

Verallgemeinerte Jacobi-Identitäten

Der Satz von Dynkin-Specht-Wever zusammen mit einer der Basen aus 4.14 ermöglicht es eine K-Basis der sogenannten *verallgemeinerten Jacobi-Identitäten*, die in der freien Lie-Algebra gelten, anzugeben.

Die Elemente von $\mathrm{Kern}(\omega)$ nennen wir naheliegend *verallgemeinerte Jacobi-Identitäten*. Dies macht Sinn, da die Tatsache, daß in der freien Lie-Algebra $\mathcal{L}_K(A)$ die Jacobi-Identität gilt, äquivalent ist dazu, daß für alle $a, b, c \in A$ gilt $(abc + bca + cab)\omega = 0$.
Einen etwas anderen Zugang findet man in [1].

4.23.Lemma. *Sei* $f \in \mathcal{L}_K(A) \setminus \{0\}$. *Setze* $f_0 := \min\{w \in A^+ \mid \langle f, w\rangle \neq 0\}$.[9]
Dann ist $f_0 \in L$.

Beweis: Wähle B' gemäß 4.14. Da $B'\beta$ eine K-Basis von $\mathcal{L}_K(A)$ ist, existiert eine Abbildung $\kappa : B' \to K$ mit $\{0\}\kappa^{-1}$ endlich und $f = \sum_{x\in B'} x\kappa\, x\beta$. Wähle $x_0 \in B'$ minimal mit $x_0\kappa \neq 0$. Dann gilt $f = x_0\kappa\, x_0\beta + \sum_{x\in B'\setminus\{x_0\}} x\kappa\, x\beta$. Wegen der Minimalität von x_0 folgt mit 4.6: $f \in x_0\kappa\ \overline{x_0}\ + \langle w \in A^+ \mid \overline{x_0}\ < w\rangle_K$. Also ist $f_0 = \overline{x_0}\ \in L$. □

4.24.Satz. *Es gilt:* $K\langle A\rangle = \mathcal{L}_K(A) \oplus \langle A^+ \setminus L\rangle_K$.

Beweis: Wegen 4.23 gilt $\mathcal{L}_K(A) \cap \langle A^+ \setminus L\rangle_K = \{0\}$.
Eine leichte Induktion mit Hilfe von 4.6 zeigt, daß $K\langle A\rangle = \mathcal{L}_K(A) + \langle A^+ \setminus L\rangle_K$ ist. □

4.25.Korollar. *Die Teilmenge* $(A^+ \setminus L)(\eta - \omega)$ *von* $K\langle A\rangle$ *ist eine K-Basis von* $\mathrm{Kern}(\omega)$.

Beweis: Offensichtlich ist $A^+ \setminus L$ eine K-Basis von $\langle A^+ \setminus L\rangle_K$. Es genügt also zu zeigen, daß die K-lineare Abbildung $(\eta - \omega)|_{\langle A^+\setminus L\rangle_K}$ bijektiv auf $\mathrm{Kern}(\omega)$ ist.

[8] Dies ist die einzige Stelle in diesem Abschnitt, an der die Voraussetzung, daß K von Charakteristik 0 ist, eingeht.

[9] Zur Definition von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ siehe 3.6.

Nach 4.22 ist $(\eta - \omega)|_{\langle A^+ \setminus L \rangle_K}$ eine Abbildung nach Kern(ω).

Zur Injektivität: Sei $f \in \mathrm{Kern}((\eta - \omega)|_{\langle A^+ \setminus L \rangle_K})$.
Dann ist einerseits $f \in \langle A^+ \setminus L \rangle_K$ und wegen 4.22 andererseits $f \in \mathrm{Kern}(\eta - \omega) = \mathcal{L}_K(A)$.
Mit 4.24 folgt $f = 0$.

Zur Surjektivität: Sei $f \in \mathrm{Kern}(\omega)$.
Wegen 4.22 ist $f \in \mathrm{Bild}(\eta - \omega)$, also existiert ein $g \in K\langle A \rangle$ mit $g(\eta - \omega) = f$. Nach 4.24 existieren $g_1 \in \mathcal{L}_K(A)$ und $g_2 \in \langle A^+ \setminus L \rangle_K$ mit $g = g_1 + g_2$.
Nach 4.22 ist $g_1 \in \mathrm{Kern}(\eta - \omega)$.
Also gilt $g_2(\eta - \omega) = g_1(\eta - \omega) + g_2(\eta - \omega) = g(\eta - \omega) = f$. □

5 Charakterisierung der von der freien assoziativen Algebra abgeleiteten Algebren

Sei A eine Menge.

Man erinnere sich an Satz 2.3. Insbesondere besagt dieser Satz, daß für alle Varietäten $\mathcal{V}$, für alle Mengen A und für alle $k \in K^2$ gilt: End $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \subseteq$ End $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$.

Diese Aussage läßt sich in vielen Fällen umkehren zu der folgenden Charakterisierung der Algebra $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k)}$:

> Sei $\circ$ eine K-bilineare Verknüpfung auf $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$, so daß gilt:
> End $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \subseteq$ End $(\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \circ)$.
> Dann existiert ein $k \in K^2$ mit $\circ = \circ_k$.

Als Beispiel betrachten wir die Varietät der assoziativen K-Algebren und setzen zusätzlich voraus, daß K ein Körper der Charakteristik 0 ist und daß $|A| \geq 2$ ist.

5.1.Satz. *Sei $\circ$ eine K-bilineare Verknüpfung auf $K\langle A \rangle$ so, daß für alle $\varphi \in$ End $K\langle A \rangle$ und für alle $x, y \in K\langle A \rangle$ gilt: $(x \circ y)\varphi = x\varphi \circ y\varphi$.*
Dann existiert ein $k \in K^2$ so, daß für alle $x, y \in K\langle A \rangle$ gilt: $x \circ y = k_1 xy + k_2 yx$.[10]

Beweis: Wähle $a, b \in A$ mit $a \neq b$.
Die K-Algebra $K\langle A \rangle$ ist insbesondere in-sich frei über A.
Für alle $x, y \in K\langle A \rangle$ existiert daher genau ein $\varphi_{x,y} \in$ End $K\langle A \rangle$ mit $a\varphi_{x,y} = x$, $b\varphi_{x,y} = y$ und $c\varphi_{x,y} = 0$ für alle $c \in A \setminus \{a, b\}$.

Nun gilt für alle $x, y \in K\langle A \rangle : x \circ y = a\varphi_{x,y} \circ b\varphi_{x,y} = (a \circ b)\varphi_{x,y}$.

Insbesondere ist $a \circ b = (a \circ b)\varphi_{a,b}$ aus dem Erzeugnis von $\{a, b\}$ in $K\langle A \rangle$.

Also ist $a \circ b = \sum_w \langle a \circ b, w \rangle w$, wobei nur über Worte $w \in A^+$, die im Erzeugnis von $\{a, b\}$ in A^+ liegen, summiert wird.

[10] Vergleiche mit [5], Section 5.4, Exercise 14.

Wegen der Bilinearität von $\circ$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sum_w 4\langle a\circ b, w\rangle w &= 4\,a\circ b \\
&= 2a\circ 2b \\
&= (a\circ b)\varphi_{2a,2b} \\
&= \sum_w \langle a\circ b, w\rangle w\varphi_{2a,2b} \\
&= \sum_w \langle a\circ b, w\rangle 2^{|w|} w \quad .
\end{aligned}$$

Da A^+ eine K-Basis von $K\langle A\rangle$ ist, gilt $(2^{|w|}-4)\langle a\circ b, w\rangle = 0$ für alle $w\in A^+$.
Da K von Charakteristik 0 ist, folgt $\langle a\circ b, w\rangle = 0$ für alle $w\in A^+$ mit $|w|\neq 2$.
Also existieren $k_1,k_2,k_3,k_4\in K$ mit $a\circ b = k_1ab+k_2ba+k_3aa+k_4bb$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&(a+b)\circ b = (a\circ b)\varphi_{a+b,b} = \\
&= (k_1ab+k_2ba+k_3aa+k_4bb)\varphi_{a+b,b} \\
&= k_1(a+b)b+k_2b(a+b)+k_3(a+b)(a+b)+k_4bb \\
&= (k_1+k_3)ab+(k_2+k_3)ba+k_3aa+(k_1+k_2+k_3+k_4)bb \quad .
\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
&a\circ b+b\circ b = (a\circ b)\varphi_{a,b}+(a\circ b)\varphi_{b,b} = \\
&= k_1ab+k_2ba+k_3aa+k_4bb+k_1bb+k_2bb+k_3bb+k_4bb \\
&= k_1ab+k_2ba+k_3aa+(k_1+k_2+k_3+2k_4)bb \quad .
\end{aligned}$$

Da $\circ$ bilinear ist, gilt $(a+b)\circ b = a\circ b+b\circ b$.
Koeffizientenvergleich ergibt: $k_3=0$ und $k_4=0$.

Dann gilt für alle $x,y\in K\langle A\rangle : x\circ y = (a\circ b)\varphi_{x,y} = (k_1ab+k_2ba)\varphi_{x,y} = k_1xy+k_2yx$. □

6 Ein nützliches Monoid

6.1.Definition und Bemerkung. *Definiere auf K^2 eine Verknüpfung $\bullet$ durch:*
$k\bullet l := (k_1l_1+k_2l_2, k_1l_2+k_2l_1)$ *für alle $k,l\in K^2$.*

Der K-Modul K^2 ist zusammen mit der Multiplikation $\bullet$ eine assoziative und kommutative K-Algebra mit Einselement $(1,0)$.
Genauer ist die Abbildung $\beta : K^2 \to K^{2\times 2}$, $k\mapsto \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1\end{pmatrix}$ ein Isomorphismus von $(K^2,\bullet)$ auf die Teilalgebra $T := \{\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1\end{pmatrix} \mid k\in K^2\}$ der K-Algebra $K^{2\times 2}$.

Beweis: nachrechnen. □

6.2.Definition und Bemerkung. *Sei $k\in K^2$.*
Dann heißt $\det(k) := {k_1}^2-{k_2}^2$ *die* Determinante *von k und* $\mathrm{ad}(k) := (k_1,-k_2)$ *die* Adjungierte *von k.*

Sei β wie in 6.1.
Dann ist $\det(k)$ *gerade die aus der linearen Algebra bekannte* Determinante *der Matrix* $k\beta = \binom{k_1\, k_2}{k_2\, k_1}$. *Ferner ist* $\mathrm{ad}(k)\beta$ *gerade die sogenannte* adjungierte *Matrix von* $k\beta = \binom{k_1\, k_2}{k_2\, k_1}$.
Es gelten:
(1) $\det(k \bullet l) = \det(k)\det(l)$ *für alle* $k, l \in K^2$,
(2) $\mathrm{ad}(k \bullet l) = \mathrm{ad}(k) \bullet \mathrm{ad}(l)$ *für alle* $k, l \in K^2$,
(3) $k \bullet \mathrm{ad}(k) = \det(k)\,(1, 0)$,
(4) $\mathrm{ad}^2 = \mathrm{id}_{K^2}$.

Beweis: Die Aussagen (1)–(3) lassen sich vermöge des Isomorphismus β auf entsprechende Aussagen der linearen Algebra zurückführen oder leicht nachrechnen. Die Aussage (4) läßt sich leicht nachrechnen. □

6.3.Bezeichnungen. *Für einen kommutativen Ring R mit Eins bezeichne mit* $\mathrm{N}(R)$ *die Menge der Nullteiler in R und mit* $\mathrm{E}(R)$ *die Menge der Einheiten in R.*

6.4.Satz. *Sei $k \in K^2$. Dann gelten:*
(1) $k \in \mathrm{N}(K^2) \iff \det(k) \in \mathrm{N}(K)$,
(2) $k \in \mathrm{E}(K^2) \iff \det(k) \in \mathrm{E}(K)$,
(3) $k \in \mathrm{E}(K^2) \Longrightarrow k^{-1} = \det(k)^{-1}\mathrm{ad}(k)$.

Beweis: zu (1): Wegen 6.2(2) gilt: $k \in \mathrm{N}(K^2) \iff \mathrm{ad}(k) \in \mathrm{N}(K^2)$.
Also gilt mit 6.2(3):

$$\begin{aligned} k \in \mathrm{N}(K^2) &\iff k \in \mathrm{N}(K^2) \text{ oder } \mathrm{ad}(k) \in \mathrm{N}(K^2) \\ &\iff k \bullet \mathrm{ad}(k) \in \mathrm{N}(K^2) \\ &\iff (\det(k), 0) \in \mathrm{N}(K^2) \quad . \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen: $(\det(k), 0) \in \mathrm{N}(K^2) \iff \det(k) \in \mathrm{N}(K)$.

Bew. davon: „$\Longrightarrow$“. Sei $(\det(k), 0) \in \mathrm{N}(K^2)$.
Dann existiert ein $x \in K^2 \setminus \{0\}$ mit $(\det(k), 0) \bullet x = 0$. Dann ist $\det(k)x = 0$, also $(\det(k)x_1, \det(k)x_2) = 0$, also $\det(k)x_1 = 0$ und $\det(k)x_2 = 0$. Wegen $x \neq 0$ ist $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$. Also ist $\det(k) \in \mathrm{N}(K)$.
„$\Longleftarrow$“. Sei $\det(k) \in \mathrm{N}(K)$. Dann existiert ein $x_1 \in K \setminus \{0\}$ mit $\det(k)x_1 = 0$. Also ist $(\det(k), 0) \bullet (x_1, 0) = 0$ mit $(x_1, 0) \neq 0$. Somit ist $(\det(k), 0) \in \mathrm{N}(K^2)$.

zu (2): „$\Longrightarrow$“. Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$.
Dann ist $k \bullet k^{-1} = (1, 0)$, also nach 6.2(1) $\det(k)\det(l) = \det(k \bullet k^{-1}) = \det(1, 0) = 1$. Damit ist $\det(k) \in \mathrm{E}(K)$.
„$\Longleftarrow$“. Sei $\det(k) \in \mathrm{E}(K)$.
Dann gilt nach 6.2(3) $k \bullet \det(k)^{-1}\mathrm{ad}(k) = (1, 0)$. Damit ist $k \in \mathrm{E}(K^2)$.

Nach dem Beweis von (2) ist (3) klar. □

Die Idee der Definition von $\bullet$ ist gerade, daß das folgende Lemma gilt. Ein entsprechendes, genauso nützliches, Lemma für die Addition in K^2 läßt sich nicht formulieren. Daher ist im folgenden nur wichtig, daß K^2 mit der Verknüpfung $\bullet$ ein kommutatives Monoid ist; die übrige Algebrenstruktur von K^2 wird keine Rolle spielen.

6.5.Lemma. *Seien $k, l \in K^2$ und sei R eine K-Algebra. Definiere auf R die Verknüpfungen $\circ_k$ und $\circ_l$ wie in 2.2.*
Dann gilt für alle $x, y \in R$: $x \circ_{k \bullet l} y = l_1\, x \circ_k y + l_2\, y \circ_k x$.

Beweis: Seien $x, y \in R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \circ_{k\bullet l} y &= (k_1 l_1 + k_2 l_2)xy + (k_1 l_2 + k_2 l_1)yx \\ &= l_1(k_1 xy + k_2 yx) + l_2(k_1 yx + k_2 xy) \\ &= l_1\, x \circ_k y + l_2\, y \circ_k x \quad . \end{aligned}$$

□

6.6.Bemerkung. *Sind die Voraussetzungen wie in 6.5, so ist die Schlußfolgerung in 6.5 offensichtlich äquivalent zu: $R^{(k\bullet l)} = (R^{(k)})^{(l)}$.*

Im folgenden seien $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren und A eine Menge.

6.7.Korollar. *Seien $k, l \in K^2$.*
Dann gilt: $\mathcal{F}^{(k\bullet l)}(\mathcal{V}, A) \subseteq \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A) \cap \mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ für alle $k, l \in K^2$.

Beweis: Nach Definition ist $A \subseteq \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$, und es ist $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ ein K-Teilmodul von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k\bullet l)}$. Mit 6.5 ist dann $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ abgeschlossen unter dem Produkt $\circ_{k\bullet l}$. Da $\mathcal{F}^{(k\bullet l)}(\mathcal{V}, A)$ nach Definition die von A erzeugte Teilalgebra von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)^{(k\bullet l)}$ ist, folgt: $\mathcal{F}^{(k\bullet l)}(\mathcal{V}, A) \subseteq \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$.
Da $(K^2, \bullet)$ kommutativ ist, folgt die Behauptung. □

6.8.Definition. *Definiere auf K^2 eine Relation $\sim$ durch:*
$k \sim l :\Longleftrightarrow \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A) \cong \mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$.

Definiere auf K^2 eine weitere Relation $\to$ durch:
$k \to l :\Longleftrightarrow$ es existiert ein Epimorphismus von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$.

6.9.Lemma. *Seien $k, l \in K^2$. Dann gilt $k \to l$ genau dann, wenn es einen Homomorphismus φ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$ gibt.*

Beweis: „$\Rightarrow$“. Es gelte $k \to l$. Dann ist $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ homomorphes Bild von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ und damit nach 1.16 auch in $\mathcal{V}^{(k)}$. Da $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}^{(k)}$ ist, existiert ein Homomorphismus φ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$.

„$\Leftarrow$“. Wähle einen Homomorphismus φ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$. Da $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ von $A\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugt wird, ist φ surjektiv auf $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$. Also gilt $k \to l$. □

6.10.Satz. *(1) Die Relation $\sim$ ist auf K^2 bzgl. der Verknüpfung $\bullet$ eine Kongruenzrelation.*

(2) Die Relation $\to$ verträgt sich mit $\sim$, d.h. für alle $k, k', l, l' \in K^2$ mit $k \sim k'$, $l \sim l'$ und $k \to l$ gilt $k' \to l'$.

(3) Die Relation $\to$ ist eine Ordnungsrelation auf K^2 in dem folgenden Sinne: $\to$ ist reflexiv und transitiv, und für alle $k, l \in K^2$ mit $k \to l$ und $l \to k$ gilt $k \sim l$.

(4) Die Relation $\to$ verträgt sich mit der Verknüpfung $\bullet$, d.h. für alle $k, l, k', l' \in K^2$ mit $k \to l$ und $k' \to l'$ gilt $kk' \to ll'$.

Beweis: zu (2) : Seien $k, k', l, l' \in K^2$ mit $k \sim k'$, $l \sim l'$ und $k \to l$.
Dann existieren ein Epimorhismus ψ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$, ein Isomorhismus κ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(k')}(\mathcal{V}, A)$ und ein Isomorhismus λ von $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l')}(\mathcal{V}, A)$.
Dann ist $\kappa^{-1}\psi\lambda$ ein Epimorphismus von $\mathcal{F}^{(k')}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l')}(\mathcal{V}, A)$.
Also gilt $k' \to l'$.

zu (3) : Die Relation $\to$ ist offensichtlich reflexiv und transitiv.
Seien $k, l \in K^2$ mit $k \to l$ und $l \to k$.
Dann existieren ein Homomorphismus φ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$ und ein Homomorphismus ψ von $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\psi = \iota_{\mathcal{V},A}$.
Dann ist $\varphi\psi \in \operatorname{End} \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi\psi = \iota_{\mathcal{V},A}$. Da $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ in-sich frei ist, folgt daraus $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V},A)}$. Ebenso sieht man ein, daß $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V},A)}$ ist.
Also ist φ ein Isomorphismus von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ und somit $k \sim l$.

zu (4) : Seien $k, l, m \in K^2$. Es gelte $k \to l$. Zeige: $k \bullet m \to l \bullet m$.
Dann gibt es einen Homomorphismus φ von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ auf $\mathcal{F}^{(l)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$.
Dann gilt nach 6.5 für alle $x, y \in \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$:

$$\begin{aligned}
(x \circ_{k\bullet m} y)\varphi &= (m_1\, x \circ_k y + m_2\, y \circ_k x)\varphi \\
&= m_1\, x\varphi \circ_l y\varphi + m_2\, y\varphi \circ_l x\varphi \\
&= x\varphi \circ_{l\bullet m} y\varphi \quad .
\end{aligned}$$

Wegen 6.7 gilt insbesondere für alle $x, y \in \mathcal{F}^{(k\bullet m)}(\mathcal{V}, A)$:

$$(x \circ_{k\bullet m} y)\varphi = x\varphi \circ_{l\bullet m} y\varphi \quad .$$

Also ist $\varphi|_{\mathcal{F}^{(k\bullet m)}(\mathcal{V},A)}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{F}^{(k\bullet m)}(\mathcal{V}, A)$ nach $\mathcal{F}^{(l\bullet m)}(\mathcal{V}, A)$.
Wegen $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$ folgt, daß $k \bullet m \to l \bullet m$ gilt.

Da $(K^2, \bullet)$ kommutativ ist, folgt daraus (4).

Aus (2), (3) und (4) folgt (1). □

6.11.Definition und Bemerkung. *Sei $k \in K^2$.
Sei φ_k der Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$ mit $\varphi_k|A = \mathrm{id}_A$.
Sei α_k der Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\alpha_k|A = \iota_{\mathcal{V},A}$.
(Diese Homomorphismen existieren und sind eindeutig bestimmt, da $\mathcal{F}_K(A)$ als K-Algebra frei über A ist.)*

Dann ist φ_k surjektiv auf $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$, und es ist α_k surjektiv auf $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$.

Beweis: Die K-Algebra $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$ wird von A erzeugt, und die K-Algebra $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ wird von $A\iota_{\mathcal{V},A}$ erzeugt.
Daraus folgt die Behauptung. □

6.12.Lemma. *Seien $k, l \in K^2$. Dann gilt: $\varphi_{k\bullet l} = \varphi_k\varphi_l$ und $\alpha_{k\bullet l} = \varphi_k\alpha_l$.*

Beweis: Es gilt: $\varphi_{k\bullet l}|_A = \mathrm{id}_A = (\varphi_k\varphi_l)|_A$ und $\alpha_{k\bullet l}|_A = \iota_{\mathcal{V},A} = (\varphi_k\alpha_l)|_A$.

Die Abbildung $\varphi_{k\bullet l}$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{F}_K^{(k\bullet l)}(A)$.

Mit 6.5 läßt sich nachrechnen, daß die Abbildung $\varphi_k\varphi_l$ ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ nach $\mathcal{F}_K^{(k\bullet l)}(A)$ ist.

Da $\mathcal{F}_K(A)$ frei über A ist, folgt insgesamt $\varphi_{k\bullet l} = \varphi_k\varphi_l$.

Ebenso läßt sich zeigen: $\alpha_{k\bullet l} = \varphi_k\alpha_l$. □

6.13.Lemma. *Sei $r \in K$. Dann gilt für alle $n \in I\!N$: $\varphi_{(r,0)}|_{\mathcal{F}_K(A)_n} = r^{n-1}\mathrm{id}_{\mathcal{F}_K(A)_n}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen: $w\varphi_{(r,0)} = r^{|w|-1}w$ für alle $w \in \mathcal{M}(A)$.

Sei $a \in A$. Dann gilt: $a\varphi_{(r,0)} = a = r^{|a|-1}a$.

Seien $u, v \in \mathcal{M}(A)$ mit $u\varphi_{(r,0)} = r^{|u|-1}u$ und $v\varphi_{(r,0)} = r^{|v|-1}v$.
Dann gilt: $(uv)\varphi_{(r,0)} = u\varphi_{(r,0)} \circ_{(r,0)} v\varphi(r,0) = rr^{|u|-1}ur^{|v|-1}v = r^{|uv|-1}uv$.

Damit ist die Menge $\{w \in \mathcal{M}(A) \,|\, w\varphi_{(r,0)} = r^{|w|-1}w\}$ ein Teilmagma von $\mathcal{M}(A)$, das A enthält. Da $\mathcal{M}(A)$ als Magma von A erzeugt wird, folgt die Behauptung. □

6.14.Korollar. *Sei $r \in K$ und sei T ein K-Teilmodul von $\mathcal{F}_K(A)$.
Dann gilt: $T\varphi_{(r,0)} \subseteq T$.*

6.15.Bemerkung. *Sei $k \in K^2$.
Ist $k \in \mathrm{E}(K^2)$, so ist φ_k ein Isomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ auf $\mathcal{F}_K(A)^{(k)}$, und es gilt ${\varphi_k}^{-1} = \varphi_{k^{-1}}$.
Ist $k \in K^2 \setminus \mathrm{N}(K^2)$, so ist φ_k ein Isomorphismus von $\mathcal{F}_K(A)$ auf $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$.*

Beweis: Es gelte $k \in \mathrm{E}(K^2)$. Nach 6.12 und 6.2 gilt: $\varphi_k\varphi_{k^{-1}} = \varphi_{k\bullet k^{-1}} = \varphi_{(1,0)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_K(A)}$.
Ebenso folgt: $\varphi_{k^{-1}}\varphi_k = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_K(A)}$.

Nun gelte $k \in K^2 \setminus \mathrm{N}(K^2)$. Dann ist nach 6.4(1) $\det(k) \in K \setminus \mathrm{N}(K)$. Mit 6.13 folgt daraus, daß $\varphi_{(\det(k),0)}$ injektiv ist. Es gilt: $\varphi_k\varphi_{\mathrm{ad}(k)} = \varphi_{k\bullet\mathrm{ad}(k)} = \varphi_{(\det(k),0)}$. Damit ist auch φ_k injektiv. Nach Bemerkung 6.11 ist φ_k surjektiv auf $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$. □

7 Identitäten

Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.

Für alle $k \in K^2$ seien φ_k und α_k definiert wie in 6.11, bloß für die Menge X statt A wie dort.

7.1.Bemerkung. *Sei $k \in K^2$. Dann ist* $\mathrm{Kern}(\alpha_k)$ *ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.*

Beweis: Da $(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X), \iota_{\mathcal{V},X})$ frei über X in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\bar{\varphi}$: $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X) \to \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ mit $\iota_{\mathcal{V},X}\bar{\varphi} = \mathrm{id}_X\varphi\alpha_k$.
Nach Definition von α_k gilt dann $\mathrm{id}_X\alpha_k\bar{\varphi} = \mathrm{id}_X\varphi\alpha_k$.
Da $\mathcal{F}_K(X)$ frei über X ist, folgt $\alpha_k\bar{\varphi} = \varphi\alpha_k$.

Sei $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.
Dann folgt $f\varphi\alpha_k = f\alpha_k\bar{\varphi} = 0$, also $f\varphi \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.

Also gilt die Behauptung. □

7.2.Satz. *Sei $k \in K^2$. Dann gilt:* $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(\mathrm{Kern}(\alpha_k))$.

Beweis: Nach Definition von $\mathcal{V}^{(k)}$ genügt es zu zeigen: $\mathcal{I}(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)) = \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.

„$\subseteq$". Sei $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X))$. Dann erfüllt $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ die Identität f. Da α_k ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_K(X)$ nach $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ ist, folgt insbesondere $f\alpha_k = 0$, also $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.

„$\supseteq$". Sei $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.
Sei $\psi : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ ein Homomorphismus.

Da α_k surjektiv auf $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ ist, existiert nach 1.10 ein Homomorphismus $\psi' : \mathcal{F}_K(X) \to \mathcal{F}_K(X)$ mit $\psi = \psi'\alpha_k$.

Da nach 7.1 $\mathrm{Kern}(\alpha_k)$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$ ist, ist auch $f\psi' \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.

Also gilt $f\psi = f\psi'\alpha_k = 0$.

Damit erfüllt $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, X)$ die Identität f, also $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A))$. $\square$

7.3.Satz. *Sei $k \in K^2$. Dann gilt:* $\mathrm{Kern}(\alpha_k) = \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}){\varphi_k}^{-1}$.

Beweis: „$\subseteq$". Sei $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$. Mit 6.12 gilt dann: $f\varphi_k\alpha_{(1,0)} = f\alpha_k = 0$, also $f\varphi_k \in \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)})$, also $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}){\varphi_k}^{-1}$.

„$\supseteq$". Sei $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}){\varphi_k}^{-1}$.
Dann gilt $f\varphi_k \in \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)})$, also mit 6.12 $f\alpha_k = f\varphi_k\alpha_{(1,0)} = 0$, und somit $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_k)$. $\square$

7.4.Satz. *Sei $k \in K^2$. Sei $\mathcal{I}$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{I})$.*
Dann gilt $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1})$.

Beweis: Nach Satz 7.2 gilt: $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(1,0)} = \mathcal{V}(\mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}))$. Also ist $\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \mathcal{V}(\mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}))$.
Da auch $\mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)})$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$ ist, folgt nach 1.23: $\mathcal{I} = \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)})$
Nach 7.3 gilt dann: $\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1} = \mathrm{Kern}(\alpha_{(1,0)}){\varphi_k}^{-1} = \mathrm{Kern}(\alpha_k)$.
Also gilt nach 7.2: $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(\mathrm{Kern}(\alpha_k)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1})$. $\square$

Damit ist die Varietät $\mathcal{V}^{(k)}$ zumindest dann bestimmt, wenn die Varietät $\mathcal{V}$ durch ein verbales Ideal von Identitäten aus $\mathcal{F}_K(X)$ gegeben ist.

In den meisten Fällen ist hingegen die Varietät $\mathcal{V}$ durch eine endliche Menge von Identitäten aus $\mathcal{F}_K(X)$ gegeben, die natürlich im allgemeinen kein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$ ist. Ist $k \in \mathrm{E}(K^2)$, so läßt sich dann die Varietät $\mathcal{V}^{(k)}$, wie im folgenden dargestellt, auch durch eine endliche Menge von Identitäten aus $\mathcal{F}_K(X)$ beschreiben.

7.5.Lemma. *Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$. Sei $\mathcal{I}$ ein verbales Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.*
Dann ist auch $\mathcal{I}\varphi_k$ ein verbales Ideal in $\mathcal{F}_K(X)$.

Beweis: Setze $\mathcal{J} := \mathcal{I}\varphi_k$. Nach 6.15 ist φ_k ein Isomorphismus von $\mathcal{F}_K(X)$ auf $\mathcal{F}_K(X)^{(k)}$.
Also ist $\mathcal{J}$ ein Ideal von $\mathcal{F}_K(X)^{(k)}$.
Seien $x \in \mathcal{J}$ und $y \in \mathcal{F}_K(X)$.
Dann sind $x \circ_k y \in \mathcal{J}$ und $y \circ_k x \in \mathcal{J}$, also $xy = \det(k)^{-1}(k_1 x \circ_k y - k_2 y \circ_k x) \in \mathcal{J}$ und $yx = \det(k)^{-1}(k_1 y \circ_k x - k_2 x \circ_k y) \in \mathcal{J}$. Somit ist $\mathcal{J}$ ein Ideal auch von $\mathcal{F}_K(X)$.

Seien $y \in \mathcal{J}$ und $\psi \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}_K(X)$. Dann existiert ein $x \in \mathcal{I}$ mit $x\varphi_k = y$. Nach 2.3 ist auch $\psi \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}_K(X)^{(k)}$, also ist $\varphi_k\psi\varphi_{k^{-1}} \in \mathrm{End}\ \mathcal{F}_K(X)$. Da $\mathcal{I}$ ein verbales Ideal von

$\mathcal{F}_K(X)$ ist, folgt: $y\psi\varphi_{k^{-1}} = x\varphi_k\psi\varphi_{k^{-1}} \in \mathcal{I}$, also $y\psi \in \mathcal{I}\varphi_k = \mathcal{J}$. Somit ist $\mathcal{J}$ ein verbales Ideal auch von $\mathcal{F}_K(X)$. □

7.6.Korollar. *Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$.*
Seien $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ und $\mathcal{I}$ das vom I erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.
Dann ist $\mathcal{I}\varphi_k$ das von $I\varphi_k$ erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$.

7.7.Satz. *Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$. Sei $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$.*
Dann gilt: $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(I\varphi_{k^{-1}})$.

Beweis: Nach 7.4, 7.6 und 1.14 gilt die Behauptung. □

7.8.Korollar. *Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$. Sei $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$.*
Dann gilt: $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(I\varphi_{\mathrm{ad}(k)})$.

Beweis: Nach 6.4(3) und 6.12 gilt: $\varphi_{\mathrm{ad}(k)} = \varphi_{\det(k)(1,0)}\varphi_{k^{-1}}$.
Da nach Voraussetzung $\det(k) \in \mathrm{E}(K)$ ist, folgt mit 6.14: $\mathcal{I}\varphi_{\mathrm{ad}(k)} = \mathcal{I}\varphi_{k^{-1}}$, wobei $\mathcal{I}$ das von I erzeugte verbale Ideal von $\mathcal{F}_K(X)$ ist. Mit 1.14 folgt die Behauptung nun aus dem vorhergehenden Satz. □

7.9.Beispiele. *Sei $k \in \mathrm{E}(K^2)$.*
a) Sei $\mathcal{V}$ nun die Varietät der assoziativen K-Algebren.
Wähle paarweise verschiedene $x_1, x_2, x_3 \in X$. Mit $I := \{(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)\}$ gilt dann nach Definition des Begriffs assoziative K-Algebra: $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$.
Dann gilt $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(I\varphi_{\mathrm{ad}(k)})$.

Also braucht man nur noch auszurechnen:

$$
\begin{aligned}
&((x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3))\varphi_{\mathrm{ad}(k)} = \\
&= (x_1 \circ_{\mathrm{ad}(k)} x_2) \circ_{\mathrm{ad}(k)} x_3 - x_1 \circ_{\mathrm{ad}(k)} (x_2 \circ_{\mathrm{ad}(k)} x_3) \\
&= {k_1}^2(x_1x_2)x_3 - k_1k_2(x_2x_1)x_3 - k_1k_2x_3(x_1x_2) + {k_2}^2x_3(x_2x_1) \\
&\quad -{k_1}^2x_1(x_2x_3) + k_1k_2x_1(x_3x_2) + k_1k_2(x_2x_3)x_1 - {k_2}^2(x_3x_2)x_1 \quad .
\end{aligned}
$$

b) Sei $\mathcal{V}$ die Varietät aller K-Algebren. Dann gilt $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\emptyset)$.
Also gilt: $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(\emptyset\varphi_{\mathrm{ad}(k)}) = \mathcal{V}(\emptyset) = \mathcal{V}$.

8 Das Isomorphieproblem

Seien $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren und A eine Menge.

8.1.Lemma. *Sei $k \in K^2$. Sei $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$.*
Dann gilt: $I\varphi_k \subseteq I \implies (1,0) \to k$.

Beweis: Es gelte: $I\varphi_k \subseteq I$. Dann gilt $\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1} \supseteq \mathcal{I}$, also $\mathcal{V}(\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I})$.
Es folgt mit 7.4: $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}(\mathcal{I}{\varphi_k}^{-1}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}) = \mathcal{V}$.
Dann gilt insbesondere $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A) \in \mathcal{V}$. Da $(\mathcal{F}(\mathcal{V}, A), \iota_{\mathcal{V},A})$ frei über A in $\mathcal{V}$ ist, existiert ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{V}, A) \to \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ mit $\iota_{\mathcal{V},A}\varphi = \iota_{\mathcal{V},A}$.
Also gilt: $(1,0) \to k$. □

8.2.Lemma. *Sei $r \in K$. Dann gilt:* $(1,0) \to (r,0)$.

Beweis: Nach 1.14 existiert ein verbales Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{I})$.
Mit 6.14 folgt $\mathcal{I}\varphi_{(r,0)} \subseteq \mathcal{I}$, also mit 8.1 $(1,0) \to (r,0)$. □

8.3.Lemma. *Sei $r \in \mathrm{E}(K)$. Dann gilt:* $(1,0) \sim (r,0)$.

Beweis: Nach 8.2 gilt $(1,0) \to (r,0)$ und $(1,0) \to (r^{-1},0)$.
Dann gilt auch $(r,0) = (r,0) \bullet (1,0) \to (r,0) \bullet (r^{-1},0) = (1,0)$.
Insgesamt gilt $(1,0) \sim (r,0)$. □

8.4.Lemma. *Sei $I \subseteq \mathcal{F}_K(X)$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$ und $I\varphi_{(0,1)} \subseteq I$.*
Dann gilt $(1,0) \sim (0,1)$.

Beweis: Mit 8.1 folgt aus der Voraussetzung: $(1,0) \to (0,1)$, also auch $(0,1) = (0,1) \bullet (1,0) \to (0,1) \bullet (0,1) = (1,0)$. Also gilt $(1,0) \sim (0,1)$. □

8.5.Lemma. *Seien $k,l \in K^2$. Dann gilt: $k \sim l \Longrightarrow (1,0) \to \mathrm{ad}(k) \bullet l$.*

Beweis: Es gelte: $k \sim l$. Dann gilt: $\det(k)(1,0) = \mathrm{ad}(k) \bullet k \sim \mathrm{ad}(k) \bullet l$. Nach 8.2 folgt $(1,0) \to \mathrm{ad}(k) \bullet l$. □

Das Isomorphieproblem in der freien assoziativen Algebra

Betrachte nun die Varietät der assoziativen K-Algebren.
Dazu sei K ein Körper und es gelte $|A| \geq 2$. Wähle $a,b \in A$ mit $a \neq b$.

8.6.Lemma. *Sei $k \in K^2$. Dann gilt: $k \sim 0 \iff k = 0$.*

Beweis: Aus $k = 0$ folgt trivialerweise $k \sim 0$
Umgekehrt gelte $k \sim 0$. Da dann $K^{(k)}\langle A\rangle \cong K^{(0)}\langle A\rangle$ ist, folgt $0 = a \circ_k b = k_1ab + k_2ba$.
Da (ab, ba) linear unabhängig ist, folgt $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$, also $k = 0$. □

8.7.Lemma. *Sei $k \in K^2$. Dann gilt: $(1,0) \to k \iff k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“. Es gelte $(1,0) \to k$. Dann ist $K^{(k)}\langle A\rangle$ assoziativ. Es folgt $(a \circ_k a) \circ_k b = a \circ_k (a \circ_k b)$, also $k_1(k_1 + k_2)aab + k_2(k_1 + k_2)baa = {k_1}^2aab + {k_2}^2baa + 2k_1k_2aba$. Da (aab, baa, aba) linear unabhängig ist, folgt daraus $k_1(k_1 + k_2) = {k_1}^2$, also $k_1k_2 = 0$, also $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$.

„$\Longleftarrow$“. Es gelte $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$. Dann gilt $k_1k_2 = 0$. Mit 7.9 und 8.1 folgt $(1,0) \to k$.
□

8.8.Satz. *Seien $k,l \in K^2$. Setze $\bar{l} := (l_2, l_1)$.*
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:
(1) $k \sim l$.
(2) Es existiert ein $r \in K \setminus \{0\}$ mit $k = rl$ oder $k = r\bar{l}$.

Beweis: (2) $\Longleftarrow$ (1) : Aus 8.3 folgt $rl \sim l$. Aus 8.4 folgt $\bar{l} \sim l$. Daraus folgt die Behauptung.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Es gelte $k \sim l$. Ist $l = 0$, so ist nach 8.6 auch $k = 0$ und es gilt $1k = 1l$. Sei also $l \neq 0$. Dann gilt $l_1 \neq 0$ oder $l_2 \neq 0$.

Ferner gilt mit 8.5: $(1,0) \to \mathrm{ad}(k) \bullet l = (k_1l_1 - k_2l_2, k_1l_2 - k_2l_1)$.
Nach 8.7 gilt dann $k_1l_1 - k_2l_2$ oder $k_1l_2 = k_2l_1$.

1.Fall: $k_1l_2 = k_2l_1$. Dann gilt:
$l_1k = (k_1l_1, k_2l_1) = (k_1l_1, k_1l_2) = k_1l$ und $l_2k = (k_1l_2, k_2l_2) = (k_2l_1, k_2l_2) = k_2l$.
Ist $l_1 \neq 0$, so gilt $k = \frac{k_1}{l_1}l$. Ist $l_2 \neq 0$, so gilt $k = \frac{k_2}{l_2}l$.

2.Fall: $k_1l_1 = k_2l_2$. Dann gilt:
$l_1k = (k_1l_1, k_2l_1) = (k_2l_2, k_2l_1) = k_2\bar{l}$ und $l_2k = (k_1l_2, k_2l_2) = (k_1l_2, k_1l_1) = k_1\bar{l}$.
Ist $l_1 \neq 0$, so gilt $k = \frac{k_2}{l_1}\bar{l}$. Ist $l_2 \neq 0$, so gilt $k = \frac{k_1}{l_2}\bar{l}$. □

Das Isomorphieproblem in der freien Algebra

Betrachte nun die Varietät aller K-Algebren.
Dazu sei K ein Integritätsbereich.

8.9.Satz. *Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ sind gerade:*
$\{0\}$, $(K \setminus \{0\})\,(1,1)$, $(K \setminus \{0\})\,(1,-1)$, $K^2 \setminus (K\,(1,1) \cup K\,(1,-1))$.
Ist $1 = -1$, *so gilt offensichtlich* $(K \setminus \{0\})\,(1,1) = (K \setminus \{0\})\,(1,-1)$.
Ist $1 \neq -1$, *so sind offensichtlich* $(K \setminus \{0\})\,(1,1)$ *und* $(K \setminus \{0\})\,(1,-1)$ *disjunkt.*

Beweis: Nach 6.15 gelten:
$r(1,1) \sim (1,1)$ und $r(1,-1) \sim (1,-1)$ für alle $r \in K \setminus \mathrm{N}(K) = K \setminus \{0\}$,
$k \sim (1,0)$ für alle $k \in K^2 \setminus \mathrm{N}(K^2) = K^2 \setminus (K\,(1,1) \cup K\,(1,-1))$.
Es gilt auch hier (wie in 8.6) für alle $k \in K^2 : k \sim 0 \iff k = 0$.
Die Algebra $\mathcal{F}_K^{(k)}(A)$ ist kommutativ für $k_1 = k_2$, antikommutativ für $k_1 = -k_2$, weder kommutativ noch antikommutativ für $k_1 \notin \{k_2, -k_2\}$.
Man mache sich klar, daß aus diesen Bemerkungen die Behauptung folgt. □

9 Die „Größe“ der homogenen Komponenten

Sei K nun ein Körper. Seien A eine Menge und $\mathcal{V}$ eine Varietät von K-Algebren.

Ist $\mathcal{V}$ zum Beispiel die Varietät aller K-Algebren oder die der assoziativen K-Algebren, so macht es Sinn von den homogenen Komponenten der K-Algebren $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ zu sprechen und nach deren Dimension zu fragen.
Ist $\mathcal{V}$ die Varietät der assoziativen K-Algebren, und $k = (1,-1)$, so läßt sich diese Frage interessant durch die Witt'sche Dimensionsformel beantworten.
Der folgende Satz zeigt, daß diese Frage sowieso nur für $k \in K(1,1) \cup K(1,-1)$ interessant ist.

9.1.Satz. *Sei* $k \in K^2 \setminus (K(1,1) \cup K(1,-1))$.
Dann gilt: $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A) = \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$.

Beweis: Es ist nach Voraussetzung $k_1 \neq k_2$ und $k_1 \neq -k_2$, also $\det(k) = {k_1}^2 - {k_2}^2 \neq 0$.
Da K ein Körper ist, ist $\det(k) \in \mathrm{E}(K)$. Nach 6.4 ist $k \in \mathrm{E}(K^2)$. Nach 6.7 gilt dann:
$\mathcal{F}(\mathcal{V}, A) = \mathcal{F}^{(1,0)}(\mathcal{V}, A) = \mathcal{F}^{(k \bullet k^{-1})}(\mathcal{V}, A) \subseteq \mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$.

Die umgekehrte Inklusion ist klar nach Definition von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$. $\square$

Dieser Satz scheint nicht konstruktiv zu sein. Er besagt zwar, daß jedes Element von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ auch Element von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ ist, aber die Frage, wie ein gegebenes Element von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ als Linearkombination von Monomen aus $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ zu schreiben ist, beantwortet dieser Satz nicht.
Das folgende Beispiel zeigt, daß auch diese Frage leicht zu beantworten ist.

9.2.Beispiel. *Betrachte die Varietät der assoziativen $\mathbb{Q}$-Algebren. Setze $k := (1, 2)$. Dann ist $\det(k) = 1^2 - 2^2 = -3$, also $k \in \mathrm{E}(\mathbb{Q}^2)$ mit $k^{-1} = \det(k)^{-1}\mathrm{ad}(k) = -\frac{1}{3}(1, -2) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Setze $l := k^{-1}$.*
Seien $a, b, c \in A$. Dann gilt in der freien assoziativen $\mathbb{Q}$-Algebra $\mathbb{Q}\langle A\rangle$:

$$\begin{aligned}
&abc = \\
&= (a \circ_{l\bullet k} b) \circ_{l\bullet k} c \\
&= {l_1}^2(a \circ_k b) \circ_k c + l_1 l_2 (b \circ_k a) \circ_k c + l_1 l_2 c \circ_k (a \circ_k b) + {l_2}^2 c \circ_k (b \circ_k a) \\
&= \frac{1}{9}(a \circ_{(1,2)} b) \circ_{(1,2)} c - \frac{2}{9}(b \circ_{(1,2)} a) \circ_{(1,2)} c - \frac{2}{9} c \circ_{(1,2)} (a \circ_{(1,2)} b) + \frac{4}{9} c \circ_{(1,2)} (b \circ_{(1,2)} a) .
\end{aligned}$$

Ferner liefert der obige Satz eine K-Basis von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$, denn jede K-Basis von $\mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ ist wegen $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A) = \mathcal{F}(\mathcal{V}, A)$ auch eine K-Basis von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$.
Der Nachteil dabei ist, daß man als K-Basis von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ eher natürlich gebildete Elemente von $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$, z.B Monome aus $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$, erwartet, denen man sofort ansieht, daß sie in $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{V}, A)$ enthalten sind, anstatt dafür den Satz benutzen zu müssen.
Diesem Mangel wird für die Varietät der assoziativen K-Algebren, für die „meisten“ $k \in K^2$, im nächsten Kapitel abgeholfen.

10 Monome in von der freien assoziativen Algebra abgeleiteten Algebren

Sei A eine Menge.

In diesem Kapitel betrachten wir die von der freien assoziativen Algebra abgeleiteten Algebren $K^{(k)}\langle A\rangle$. Ziel dabei ist es, für gewisse $k \in K^2$ eine K-Basis von $K^{(k)}\langle A\rangle$, bestehend aus linksgeklammerten Monomen, anzugeben.

10.1.Definition. *Sei $k \in K^2$.*
Definiere $\omega^{(k)} \in \mathrm{End}_K K\langle A\rangle$ zunächst auf A^+ rekursiv durch:

$$\begin{array}{rll}
a\,\omega^{(k)} := a & \textit{für} & a \in A \\
(xa)\,\omega^{(k)} := x\omega^{(k)} \circ_k a & \textit{für} & x \in A^+, a \in A
\end{array} ,$$

und anschließend durch K-lineare Fortsetzung.

Die Elemente von $A^+\omega^{(k)}$ heißen linksgeklammerte Monome *in $K^{(k)}\langle A\rangle$.*

Zur Beschreibung der Abbildung $\omega^{(k)}$ erweist sich die wie folgt definierte Operation des Gruppenrings KS_n der symmetrischen Gruppe S_n auf dem K-Modul $K\langle A\rangle_n$ als nützlich.

10.2.Definition und Bemerkung. *Sei $n \in I\!N$.*
Für alle $\pi \in S_n$ und für alle $w \in A_n^+$ setze $\pi w := w_{1\pi} w_{2\pi} \cdots w_{n\pi}$.
Damit wird durch K-bilineare Fortsetzung eine Operation von KS_n auf $K\langle A\rangle_n$ definiert, d.h. der K-Modul $K\langle A\rangle_n$ ist damit ein KS_n-Modul.

10.3.Definition. *Für alle $n \in I\!N$ und für alle $j \in \underline{n}\rfloor$ definiere $j\!\downarrow\, \in S_n$ durch $j\!\downarrow := (j\,,\, j-1\,,\,\ldots\,,\,1)$, d.h. für alle $i \in \underline{n}\rfloor$ setze*

$$i\, j\!\downarrow\, := \begin{cases} j \text{ falls } i = 1 \\ i-1 \text{ falls } 1 < i \leq j \\ i \text{ falls } j < i \leq n \end{cases} \quad .$$

10.4.Definition. *Für alle $k \in K^2$ und für alle $n \in I\!N$ definiere $\omega_n^{(k)} \in KS_n$ durch:*

$$\omega_n^{(k)} := \prod_{j=n}^{2} (k_1 \,\mathrm{id} + k_2\; j\!\downarrow) \quad .$$

10.5.Bemerkung. *Sei $k \in K^2$.*
Dann gilt für alle $n \in I\!N$ und $x \in A_n^+$: $x\,\omega^{(k)} = \omega_n^{(k)}\, x$.

Beweis: eine leichte Induktion. □

10.6.Bemerkung. *Sei $k \in K^2$. Dann ist $\omega^{(1,-1)} = \omega$ (siehe 4.16). Falls K ein Körper der Charakteristik 0 ist, erhält man für $n \in I\!N$ mit $\theta_n := \frac{1}{n}\omega_n^{(1,-1)}$ gerade das berühmte Wever'sche Idempotent.*

10.7.Lemma. *Sei G eine Gruppe. Seien $k \in K^2$, $\gamma \in G$ und $n \in I\!N$ mit $\gamma^n = 1_G$.*
Dann gilt in KG :

$$(k_1 1_G + k_2\gamma) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {k_1}^{n-1-j} {k_2}^j \gamma^j = ({k_1}^n - (-k_2)^n)\, 1_G \quad .$$

Beweis: Es gelten:

$$\begin{aligned} k_1 1_G \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {k_1}^{n-1-j} {k_2}^j \gamma^j &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {k_1}^{n-j} {k_2}^j \gamma^j \quad , \\ k_2\gamma \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {k_1}^{n-1-j} {k_2}^j \gamma^j &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} {k_1}^{n-j} {k_2}^j \gamma^j \quad . \end{aligned}$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
&(k_1 1_G + k_2\gamma)\ \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j {k_1}^{n-1-j}{k_2}^j\gamma^j = \\
&= \ (-1)^0 {k_1}^{n-0}{k_2}^0\gamma^0 + (-1)^{n-1}{k_1}^{n-n}{k_2}^n\gamma^n \\
&= \ {k_1}^n 1_G + (-1)^{n-1}{k_2}^n 1_G \\
&= \ ({k_1}^n - (-k_2)^n)\, 1_G \quad .
\end{aligned}
$$

□

10.8.Satz. *Seien $k \in K^2$ und $n \in I\!N$. Dann gilt in KS_n :*

$$\omega_n^{(k)}\ \prod_{j=2}^{n}\ \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i {k_1}^{j-1-i}{k_2}^i\ j{\downarrow}^i = \prod_{j=2}^{n}({k_1}^j - (-k_2)^j)\ \mathrm{id} \quad .$$

Beweis: Für alle $j \in \underline{n|}$ gilt $j{\downarrow}^j = id$. Also gilt nach 10.7 :

$$(k_1\mathrm{id} + k_2\ j{\downarrow}^j)\ \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i {k_1}^{j-1-i}{k_2}^i\ j{\downarrow}^i = ({k_1}^j - (-k_2)^j)\,\mathrm{id} \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

10.9.Korollar. *Es ist $\omega_n^{(k)}$ genau dann in KS_n invertierbar, wenn gilt:*

$$\prod_{j=2}^{n}({k_1}^j - (-k_2)^j) \in \mathrm{E}(K) \quad .$$

In diesem Fall ist $\omega_n^{(k)}\ A_n^+$ eine K-Basis von $K^{(k)}\langle A\rangle \cap K\langle A\rangle_n$.

10.10.Korollar. *Sei $k \in K^2$ derart, daß für alle $n \in I\!N$ gilt ${k_1}^n - (-k_2)^n \in \mathrm{E}(K)$. Dann ist $A^+\omega^{(k)}$ eine K-Basis von $K^{(k)}\langle A\rangle$.*

Schluß

Betrachte nun die Varietät $\mathcal{V}$ der assoziativen K-Algebren, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß K ein Körper ist. Dann gilt: $\mathrm{E}(K^2) = K^2 \setminus (K(1,1) \cup K(1,-1))$.

In Kapitel 7 wurden die Varietäten $\mathcal{V}^{(k)}$, $k \in K^2 \setminus (K(1,1) \cup K(1,-1))$, bestimmt. In Kapitel 4 wurde gezeigt, daß $\mathcal{V}^{(1,-1)}$ die Varietät der K-Lie-Algebren ist. Nach Kapitel 8 ist $\mathcal{V}^{(k)} = \mathcal{V}^{(1,-1)}$ für alle $k \in (K \setminus \{0\})(1,-1)$. Ferner ist $\mathcal{V}^{(0)} = \mathcal{V}(\{x_1x_2\})$, wobei $x_1, x_2 \in X$ verschieden sind.
Was also übrigbleibt, ist der Fall $k \in K(1,1)$, der sich gemäß Kapitel 8 auf den Fall $k = (1,1)$ reduzieren läßt.

Dies führt auf die offene Frage:

$$\boxed{\text{Welche Identitäten bestimmen die Varietät } \mathcal{V}^{(1,1)} \text{ ?}}$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß alle Algebren aus $\mathcal{V}^{(1,1)}$ Jordan-Algebren sind, siehe Kapitel 0. Es ist aber bekannt, daß $\mathcal{V}^{(1,1)}$ ein echte Teilklasse der Varietät aller Jordan-Algebren ist.

Interessante Teilantworten geben die Sätze von MacDonald und Shirsov, siehe dazu [3] Kapitel I , insbesondere Abschnitt I.9 .

Literatur

[1] Dieter Blessenohl und Hartmut Laue, Generalized Jacobi Identities, Note di Matematica Vol. VIII-n.1, 111-121, 1988.

[2] Nathan Jacobsen, Basic Algebra II, Second Edition, W.H. Freeman and Company, 1989.

[3] Nathan Jacobsen, Structure and Representations of Jordan-Algebras, American Mathematical Society Colloquium Publications Volume XXXIX, 1968.

[4] Lothaire, Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics, Vol.17, Addison-Wesley, 1983.

[5] Magnus, Karrass und Solitar, Combinatorical Group Theory, Pure and Applied Mathematics, Volume XIII, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1966.

[6] Ernst Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, Journal für Mathematik, Bd.177, Heft 3, 1937.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe und daß ich keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Kiel, den 24.Januar 1994 Armin Jöllenbeck