Eine Symmetrieeigenschaft von Solomons Algebra und der höheren Lie-Charaktere

Armin Jöllenbeck* und Christophe Reutenauer†

Zusammenfassung

We prove here three results in chain: the result of Section 2 is a symmetry property of the higher Lie characters of S_n (which are indexed by partitions): their character table is essentially symmetric, up to well-known factors. This is established using plethystic methods in the algebra of symmetric functions. In Section 3, we show that for any elements φ, ψ of the Solomon descent algebra of S_n, one has $c(\varphi)(\psi) = c(\psi)(\varphi)$, where c is the Solomon mapping from this algebra to the space of central functions on S_n (implicitly extended to its group algebra). We address also the question whether this is true for each finite Coxeter group. Then in the last section, we deduce a new proof of a result of Gessel and the second author that gives the number of permutations with given cycle type and descent set as scalar product of two special characters.

1 Einleitung

Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist die freie assoziative Algebra über $\mathbb{Q}$ in unendlich vielen nichtkommutierenden Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ die direkte Summe der Untervektorräume U_μ, μ Partition einer natürlicher Zahl, die man wie folgt definiert: U_μ sei erzeugt durch alle Elemente der Form

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} P_{1\sigma} P_{2\sigma} \ldots P_{k\sigma} \quad ,$$

wobei $P_1, \ldots, P_k$ beliebige homogene Lie-Elemente sind (d.h. Elemente der durch die Variablen $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ erzeugten Lie-Teilalgebra der freien assoziativen Algebra), mit $\operatorname{grad}(P_i) = \mu_i$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$.

Es gibt eine kanonische Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n auf dem multilinearen Anteil des Raumes U_μ. Wir bezeichnen mit l_μ die symmetrische Funktion, die dieser Darstellung entspricht, d.h. l_μ ist die Frobenius-Charakteristik deren Charakters. Diese Charaktere nennen wir *höhere Lie-Charaktere*.

*Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Gefördert im Rahmen des DFG-Projektes BL 488/1-1.
†Université du Québec à Montréal. Gefördert durch einen NSERC-grant (Canada).

Mit den Notationen aus [7] (insbesondere steht $\circ$ für den Plethysmus symmetrischer Funktionen) haben wir nach [1]

$$l_\mu = (h_{m_1} \circ l_1)(h_{m_2} \circ l_2) \ldots \quad ,$$

mit $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \ldots$ und

$$l_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p_d^{n/d} \quad .$$

Für Einzelheiten, siehe [10], 8.5.

In Abschnitt 2 beweisen wir zuerst eine Symmetrieeigenschaft der höheren Lie-Charaktere: ihre Charaktertafel ist im wesentlichen symmetrisch. In Abschnitt 3 betrachten wir dann Idempotente im Gruppenring der symmetrischen Gruppe, die zu U_μ isomorphe Darstellungen und damit wiederum die höheren Lie-Charaktere liefern. Diese Idempotente liegen in Solomons Algebra zur symmetrischen Gruppe. Wir erhalten eine Symmetrieeigenschaft für den von Solomon in [12] angegebenen Epimorphismus auf die Algebra der Klassenfunktionen der symmetrischen Gruppe. Damit gelingt es uns in Abschnitt 4 einen neuen Beweis eines Satzes von Ira Gessel und des zweiten Autors zu geben, der die Permutationen mit gegebenem Zykeltyp und gegebener Defektmenge als Skalarprodukt zweier spezieller Charaktere zählt. Der eine ist eng mit Solomons Algebra verknüpft, der andere ist ein höherer Lie-Charakter.

2 Eine Symmetrieeigenschaft der Lie Charaktere

Es seien $t_1, t_2, \ldots$ kommutierende Variablen. Wir bilden die symmetrische Funktion, die als erzeugende Funktion aller l_μ gelten kann:

$$L = \sum_\mu t_\mu l_\mu \quad \text{mit } t_\mu = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots$$

Wenn man die l_μ in der Basis der Potenzsummen p_λ schreibt, erhält man

$$L = \sum_{\mu,\lambda} a_{\mu\lambda}\, t_\mu\, p_\lambda \quad \text{mit } a_{\mu\lambda} \in \mathbb{Q} \quad .$$

Satz 2.1 *Für alle Partitionen λ, μ gilt:*

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda} \quad .$$

Dieser Satz findet sich schon in [11], Th. 3.10, (siehe auch [13], ex.7.89.g). Wir geben hier einen direkten Beweis, mit einer Vereinfachung von Ira Gessel (private Mitteilung an den zweiten Autor).

Beweis: Wegen

$$\sum_{m \geq 0} h_j = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{p_m}{m} \right)$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{\lambda} t_{\lambda} l_{\lambda} \\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k, 1\le j_1,\ldots,j_k} t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k} h_{j_1}\circ l_{i_1}\ldots h_{j_k}\circ l_{i_k} \\
&= \prod_{i\ge 1}(\sum_{j\ge 0} t_i^j h_j \circ l_i) \\
&= \prod_{i\ge 1}((\sum t_i^j h_j)\circ l_i) \\
&= \prod_{i\ge 1}((\exp(\sum_{m\ge 1} t_i^m p_m/m))\circ l_i) \\
&= \prod_{i\ge 1}(\exp(\sum_{m\ge 1} t_i^m (p_m/m)\circ l_i)) \\
&= \exp(\sum_{i,m\ge 1} t_i^m (p_m/m)\circ l_i) \\
&= \exp(\sum_{i,m\ge 1} t_i^m/m \sum_{d|i}(1/i)\mu(d) p_{md}^{i/d}) \\
&= \exp(\sum_{d,m,n\ge 1}(1/mnd)\mu(d) p_{md}^n t_{nd}^m) \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei wir $i = nd$ setzen um die letzte Gleichung zu erhalten.

Sei φ der $\mathbb{Q}$-Algebrenhomomorphismus von $\mathbb{Q}[[t_1,t_2,\ldots,p_1,p_2,\ldots]]$ in sich selbst, der t_i auf p_i abbildet und umgekehrt. Dann genügt es zu zeigen, daß $\varphi(L) = L$ ist. Mit der obigen Formel für L ist dies nun aber offensichtlich. □

3 Solomons Algebra zur symmetrischen Gruppe

Die Gruppenalgebra $\mathbb{Q}S_n$ besitzt eine bemerkenswerte Teilalgebra Σ_n, die von Solomon entdeckt und in [12] allgemeiner für Coxeter-Gruppen beschrieben wurde. Als Teilraum ist sie erzeugt durch die Elemente

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ D(\sigma)=D}} \sigma \quad , \quad D \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \quad ,$$

wobei $D(\sigma) = \{i \mid 1 \le i \le n-1,\ \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$ die *Defektmenge* von σ ist. Es gibt einen Epimorphismus c von Σ_n auf die Algebra $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{Q}} S_n$ der Klassenfunktionen von S_n. Er ist dadurch definiert, daß das Element $\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ D(\sigma)\subseteq D}} \sigma$ auf den Young-Charakter von S_n abgebildet wird, der induziert ist vom trivialen Charakter der

Young-Untergruppe $S_{q_1} \times \ldots \times S_{q_k}$, mit $D = \{q_1, q_1+q_2, \ldots, q_1+q_2+\ldots+q_{k-1}\}$. Für Einzelheiten, siehe [10], Kapitel 9, und [5].

Jede Klassenfunktion auf S_n definiert durch lineare Fortsetzung eine Funktion von $\mathbb{Q}S_n$ nach $\mathbb{Q}$.

Satz 3.1 *Seien $\varphi, \psi \in \Sigma_n$. Dann gilt:*

$$c(\varphi)(\psi) = c(\psi)(\varphi) \quad .$$

Wir benutzen eine spezielle Basis von Σ_n aus [2], siehe auch [5]. Deren Elemente werden mit ω_q bezeichnet, $q = q_1 q_2 \ldots q_k$ Zerlegung von n, d.h. $q_1 + q_2 + \ldots q_k = n$. Wir bezeichnen mit $q?$ die natürliche Zahl $\prod_{i \geq 1} i^{n_i}(n_i!)$, wobei n_i die Anzahl der i in q ist. In Macdonalds Notation, siehe [7], heißt dies $q? = z_\lambda$, wobei λ die Partition zu q ist. Mit der Bezeichnung $\nu_q := \frac{1}{q?}\omega_q$ gilt dann: $c(\nu_q)$ ist die charakteristische Funktion C_λ von der Konjugiertenklasse zum Zykeltyp λ in S_n. Eine andere wesentliche Eigenschaft der ν_q ist im nächsten Lemma enthalten.

Lemma 3.2 *Das Element ν_q ist ein Idempotent in $\mathbb{Q}S_n$, und die Frobenius-Charakteristik des Charakters des S_n-Rechtsmodul $\nu_q\mathbb{Q}S_n$ ist die symmetrische Funktion l_λ.*

Beweis: Die Darstellung von S_n auf dem multilinearen Anteil des Raumes U_λ hat die symmetrische Funktion l_λ als Frobenius-Charakteristik, siehe Abschnitt 1. Wir werden ein Element $\phi_\lambda \in \mathbb{Q}S_n$ definieren und zeigen, daß $\nu_q\phi_\lambda = \nu_q$ und $\phi_\lambda\nu_q = \phi_\lambda$ gilt. Die Rechnung, die wir für letzeres hier geben, wurde dem ersten Autor von Thorsten Bauer gezeigt. Diese beide Gleichungen implizieren, daß ν_q und ϕ_λ Idempotente sind und daß die Darstellungen von S_n auf $\nu_q\mathbb{Q}S_n$ und $\phi_\lambda\mathbb{Q}S_n$ isomorph sind. Dann zeigen wir, daß die Darstellung auf $\phi_\lambda\mathbb{Q}S_n$ dieselbe ist wie die am Anfang des Beweises erwähnte Darstellung. Insgesamt ist dann das Lemma bewiesen.

Es sei $\mathbb{Q}\langle X\rangle = \mathbb{Q}\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ die freie assoziative Algebra wie in Abschnitt 1. Die Gruppe S_n operiert kanonisch von links auf $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ durch $\sigma.y_1 \ldots y_n = y_{1\sigma} \ldots y_{n\sigma}$ ($y_i \in X$), und $\sigma.y_1 \ldots y_m = 0$ wenn $m \neq n$. Damit wird $\mathbb{Q}S = \bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Q}S_n$ eine Teilalgebra von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle X\rangle)$ (wir lassen diese wie üblich von links auf $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ operieren). Darüber hinaus ist $\mathbb{Q}S$ auch eine Teilalgebra von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle X\rangle)$ bzgl. des Konvolutionsprodukts $*$, siehe z.B. [10].

Für q der Länge 1, $q = (n)$ ist $\nu_n = \frac{1}{n}\omega_n$ das sogenannte *Dynkin-Idempotent*, und ω_q wird in [2] (siehe auch [5]) definiert als Produkt $\omega_q = \omega_{q_1} * \ldots * \omega_{q_n}$ für $q = (q_1, \ldots, q_k)$. Es wird in [2] gezeigt dass $\omega_q\omega_p = q?\omega_q$ gilt, falls q und p zur selben Partition gehören (ebenfalls in [6], Lemma 3.10, siehe auch [8], Lemma 3.1, wo dieses verallgemeinert wird).

Es sei $\phi_\lambda = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{\lambda(p)=\lambda}\dfrac{1}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots}\,\omega_p$, mit $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2}\ldots$, und $\lambda(p)$ die zu p assoziierte

Partition. Damit erhalten wir in $\mathbb{Q}S_n$:

$$\begin{aligned}
\nu_q\phi_\lambda &= \frac{1}{q?k!1^{m_1}2^{m_2}\dots}\sum_{\lambda(p)=\lambda}\omega_q\omega_p \\
&= \frac{1}{k!1^{m_1}2^{m_2}\dots}\frac{k!}{m_1!m_2!\dots}\omega_q \\
&= \nu_q \quad ,
\end{aligned}$$

weil es $\frac{k!}{m_1!m_2!\dots}$ Zerlegungen gibt die zu λ assoziert sind. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda\nu_q &= \frac{1}{q?k!1^{m_1}2^{m_2}\dots}\sum_{\lambda(p)=\lambda}\omega_p\omega_q \\
&= \frac{1}{k!1^{m_1}2^{m_2}\dots}\sum_{\lambda(p)=\lambda}\omega_p \\
&= \phi_\lambda \quad .
\end{aligned}$$

Man weiß, daß $\omega_n\mathbb{Q}\langle X\rangle = \mathcal{L}_n$ ist – der n-te homogenen Anteil der freien Lie Algebra. Es folgt mit derselben Rechnung wie in [10], Lemma 9.17, daß $\phi_\lambda\mathbb{Q}\langle X\rangle = U_\lambda$ ist. Dies zeigt, daß der multilineare Anteil von U_λ gleich $\phi_\lambda\mathbb{Q}S_n$ ist, wenn wir kanonisch $\mathbb{Q}S_n$ mit dem Teilraum von $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ identifizieren, der durch die Worte $x_{1\sigma}\dots x_{n\sigma}$, $\sigma \in S_n$, erzeugt wird. □

Nun zum Beweis des Satzes:

Beweis: Nach der Eigenschaft, die vor dem Lemma steht, haben wir für zwei Zerlegungen q und r von n, daß $c(\nu_q)(\nu_r) = C_\lambda(\nu_r)$ ist. Schreiben wir $\nu_r = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma$, $a_\sigma \in \mathbb{Q}$, so ist $C_\lambda(\nu_r)$ die Summe aller a_σ mit $\lambda(\sigma)$ (d.h. Zykeltyp von σ) = λ. Anders gesagt ist $C_\lambda(\nu_r)$ gleich dem Koeffizienten von p_λ in $\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma p_{\lambda(\sigma)}$. Nach einem Satz von Frobenius, siehe z.B. [10], Lemma 8.4. (ii), ist letzteres gleich der Frobenius-Charakteristik des Charakters der Darstellung von S_n auf $\nu_r\mathbb{Q}S_n$.

Aber nach dem Lemma ist diese Charakteristik gleich l_μ, wobei μ die zu r assoziierte Partition ist. Schliesslich ist $c(\nu_q)(\nu_r)$ gleich dem Koeffizienten von p_λ in l_μ. Nach dem Satz in Abschnitt 2, ist dieser gleich dem Koeffizienten von p_μ in l_λ, d.h. gleich $c(\nu_r)(\nu_q)$.

Da die ν_q eine Basis von Σ_n bilden, ist damit der Satz bewiesen. □

Bemerkungen:

1. Die Abbildung c wird in [12] für alle Solomon-Algebren zu Coxeter-Gruppen definiert. Sie bildet jeweils diese Algebra in den Raum der Klassenfunktionen der Gruppe ab. So kann man sich fragen, ob der obige Satz für alle Coxeter-Gruppen gilt. Für die Dieder-Gruppen zeigt dies eine elementare Rechnung. Für die hyperoktaedrischen Gruppen scheint uns eine Verallgemeinerung der Methoden aus [5], [9] und des vorliegenden Artikels vielversprechend.

2. Die bilineare Form $(\varphi, \psi) \mapsto c(\varphi)(\psi)$ auf Σ_n ist nach dem obigen Satz symmetrisch. Ihr Radikal K_n enthält ker c, so ist seine Dimension wenigstens $\dim(\Sigma_n) - \dim(\mathrm{Im}\, c) = 2^{n-1} - p(n)$, wobei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n ist. Wir zeigen, daß diese Dimension echt größer ist.

   Es sei nämlich d_n die Dimension des Vektorraumes, der von den symmetrischen Funktionen l_μ, μ Partition von n, erzeugt wird. Man weiß, daß $d_n < p(n)$ ist, wenn $n \geq 4$: die l_μ sind nämlich nicht linear unabhängig.

   Wir zeigen, daß $\dim(K_n) = 2^{n-1} - d_n$. Da $c(\nu_\lambda) = C_\lambda$ ist, siehe Seite 4, und die C_λ linear unabhängig sind, ist die Summe der Vektorräume

$$\langle \{\nu_\lambda,\ \lambda \vdash n\} \rangle + \ \mathrm{Ker}\ (c)$$

   direkt. So genügt es zu zeigen, daß $\varphi = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_\lambda \nu_\lambda$ $(\alpha_\lambda \in \mathbb{Q})$ genau dann in K_n ist, wenn $\sum \alpha_\lambda l_\lambda = 0$ ist.

   Man hat:

$$\begin{aligned} \varphi \in K_n \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall_{\psi \in \Sigma_n} \quad c(\psi)(\varphi) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall_{q \text{ Zerlegung von } n} \quad c(\nu_q)(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

   Da $c(\nu_q)(\nu_\lambda)$ gleich den Koeffizient von p_μ in l_λ ist (wobei μ die zu q assoziierte Partition ist), haben wir, daß φ genau dann in K_n ist, wenn für alle $\mu \vdash n$ der Koeffizient von p_μ in $\sum \alpha_\lambda l_\lambda$ gleich 0 ist, d.h., wenn $\sum \alpha_\lambda l_\lambda = 0$ ist.

3. Der genaue Wert der Dimensionen d_n ist uns nicht bekannt, aber nach [3] hat man: $d_n = p(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3$, $d_n = p(n) - 1$ für $n = 4, 5, 6$ und $d_n = p(n) - 2$ für $n = 7$. Weiter hat man $l_4 = l_{211} = h_2 e_2$.

4 Zykeltyp und Defektmenge

Gegeben eine Teilmenge D von $\{1, \ldots, n-1\}$ und eine Partition λ von n kann man sich fragen, wie viele Permutationen $\sigma \in S_n$ es gibt mit $D(\sigma) = D$ und $\lambda(\sigma) = \lambda$; d.h., gesucht ist die Anzahl der Permutationen mit gegebener Defekttmenge und gegebenem Zykeltyp. In [4] wurde eine Formel für diese Anzahl gegeben, als Skalarprodukt zweier symmetrischen Funktionen. Die erste ist die symmetrische Funktion $S_D = S_q$, $q = (q_1, \ldots, q_k)$ Zerlegung von n, mit $D = \{q_1, q_1 + q_2, \ldots, q_1 + q_2 + \ldots + q_{k-1}\}$, die schiefe Schur-Funktion mit Diagramm der Randhaken assoziiert zu q. Die zweite symmetrische Funktion ist l_λ, wie im Abschnitt 2 definiert.

Satz 4.1 ([4]) *Die Anzahl der Permutationen mit Defektmenge D und Zykeltyp λ ist gleich dem Skalarprodukt (S_D, l_λ).*

Als Anwendung des Satzes in Abschnitt 3 geben wir hier einen neuen Beweis.

Beweis: Die Anzahl A der Permutationen wie im Satz ist gleich $C_\lambda(\mathcal{D}_D)$, wobei C_λ die charakteristische Funktion der Permutationen des Zykeltyps λ ist, und $\mathcal{D}_D$ die Summe in $\mathbb{Q}S_n$ der Permutationen mit Defektmenge D ist. Wir wissen, daß $C_\lambda = c(\nu_\lambda)$ ist, siehe Seite 4. Wir erhalten $A = c(\nu_\lambda)(\mathcal{D}_D) = c(\mathcal{D}_D)(\nu_\lambda)$ nach dem Satz in Abschnitt 3. Durch Inklusion und Exklusion erhalten wir aus der Definition von c auf Seite 3, daß $c(\mathcal{D}_D) = \theta_D$ der Charakter zur symmetrischen Funktion S_D ist. Also ist $A = \theta_D(\nu_\lambda)$.

Andererseits ist ν_λ ein Idempotent in $\mathbb{Q}S_n$; es sei χ_λ der Charakter der Darstellung von S_n auf $\nu_\lambda\mathbb{Q}S_n$. Nach einem Satz von Frobenius (siehe z.B. [10] Lemma 8.4.(i)) ist $\theta_D(\nu_\lambda) = (\theta_D, \chi_\lambda)$ (Skalarprodukt der Charaktere). Dies ist aber gleich (S_D, l_λ) (Skalarprodukt der zugehörigen symmetrischen Funktionen). $\square$

Literatur

[1] F. Bergeron, N. Bergeron and A. Garsia. Idempotents for the free Lie algebra and q-enumeration. Invariant theory and tableaux, volume 19, edited by D. Stanton. IMA Volumes in Mathematics and its applications. Springer Verlag, Berlin 1988.

[2] D. Blessenohl und H. Laue. On the descending Loewy series of Solomon's descent algebra. Journal of Algebra, 180:698-724, 1996

[3] I. Gessel. Brief an C. Reutenauer, Juli 1989.

[4] I. Gessel and C. Reutenauer. Counting permutations with given cycle structure and descent set. Journal of Combinatorical Theory A, 64:189-215, 1993.

[5] A. Jöllenbeck. Nichtkommutative Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen. Dissertation, Universität Kiel, 1998. Bayreuther Mathematischen Schriften 56:1-41, 1999.

[6] D. Krob, B. Leclerc and J.-Y. Thibon. Noncommutative symmetric functions II / Transformations of Alphabets. International Journal of Algebra and Computation 7:181-264, 1997.

[7] I. G. Macdonald. Symmetric functions and Hall Polynomials. Oxford University Press, 1979.

[8] F. Patras and C. Reutenauer. Higher Lie idempotents. Journal of Algebra 222:51-64, 1999.

[9] S. Poirier. Cycle type and descent set in wreath products. Discrete Mathematics, 180:315-343, 1998.

[10] C. Reutenauer. Free Lie algebras. Oxford University Press, 1993.

[11] T. Scharf and J.-Y. Thibon. A Hopf algebra approach to inner plethysm. Advances in Mathematics, 104:30-58, 1994.

[12] L. Solomon. A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group. Journal of Algebra, 41:255-268, 1976.

[13] R. Stanley. Enumerative combinatorics, volume 2. Cambridge University Press, 1999.

Aktuelle Anschriften der Autoren:

Armin Jöllenbeck
Mathematisches Seminar der Universitt Kiel
Ludewig-Meyn-Str. 4
24098 Kiel
Germany

Christophe Reutenauer
IRMA
7 rue Descartes
67084 Strasbourg
France

Email:

`joellenbeck@math.uni-kiel.de`

`reutenau@irmasrv1.u-strasbg.fr`